Теорема об изогоналях

А.КУЛИКОВА, Д.ПРОКОПЕНКО

Доказательство основных фактов

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма (свойство и признак изогоналей).

Свойство. *Пусть OP и OQ – изогонали угла MON, x_P и y_P (x_Q и y_Q) – расстояния от точки P (Q) до прямых OM и ON соответственно (рис.12). Тогда*

$$\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}.$$

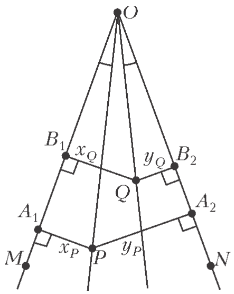

Рис. 12

Признак. *Пусть x_P и y_P (x_Q и y_Q) – расстояния от точки P (Q) до прямых OM и ON соответственно и $\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}$. Тогда OP и OQ – изогонали угла MON.*

Доказательство свойства. Пусть A_1 и A_2 – проекции точки P на прямые OM и ON соответственно (см. рис.12). Аналогично определим B_1 и B_2 – проекции точки Q.

Из подобных треугольников OPA_1 и OQB_2 следует

$$\frac{x_P}{y_Q} = \frac{OP}{OQ}. \qquad (1)$$

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

Аналогично из треугольников OQB_1 и OPA_2 найдем

$$\frac{x_Q}{y_P} = \frac{OQ}{OP}. \qquad (2)$$

Перемножим (1) и (2) и получим $\frac{x_P}{y_Q} \cdot \frac{x_Q}{y_P} = 1$. Следовательно, $\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}$. Свойство изогоналей доказано.

Упражнение 9. Докажите признак.

Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников A_1PA_2 и B_1QB_2.

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Теорема об изогоналях. *Пусть OB и OC – изогонали угла AOD (рис.13,а). Прямые AC и BD пересекаются в точке Q, прямые AB и CD – в точке P. Тогда OP и OQ – также изогонали относительно угла AOD.*

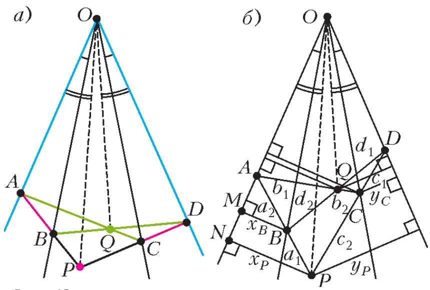

Рис. 13

Доказательство. Пусть x_P и y_P – расстояния от точки P до прямых OA и OD соответственно. Аналогично будем обозначать расстояния от точек Q, B и C.

Обозначим также для краткости длины сторон выпуклого четырехугольника $PBQC$ так: $PB = a_1$, $BQ = d_2$, $QC = b_2$, $CP = c_2$; отрезки $BA = a_2$, $AQ = b_1$, $QD = d_1$, $DC = c_1$ (рис.13,б).

Условие, что OP и OQ – изогонали, по лемме равносильно равенству

$$\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}, \qquad (3)$$

или

$$\frac{x_P x_Q}{y_P y_Q} = 1.$$

Будем доказывать это равенство.

Для точек B и P из подобных прямоугольных треугольников APN и ABM получим равенство

$$\frac{x_P}{x_B} = \frac{a_1 + a_2}{a_2}. \qquad (4)$$

Далее аналогично для пар точек P и C, B и Q, Q и C получим соответственно

$$\frac{y_C}{y_P} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \qquad (5)$$

$$\frac{y_Q}{y_B} = \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \qquad (6)$$

$$\frac{x_C}{x_Q} = \frac{b_1 + b_2}{b_1}. \qquad (7)$$

Из равенств (4)–(7) найдем выражение $M = \dfrac{x_P x_Q}{y_P y_Q}$ и докажем, что $M = 1$, а это равносильно (3).

Действительно,

$$M = \frac{x_B x_C}{y_B y_C} \cdot \frac{\dfrac{a_1 + a_2}{a_2} \cdot \dfrac{c_1}{c_1 + c_2}}{\dfrac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \dfrac{b_1 + b_2}{b_1}} =$$

$$= \frac{(a_1 + a_2)(d_1 + d_2) b_1 c_1}{d_1 a_2 (c_1 + c_2)(b_1 + b_2)}. \qquad (8)$$

Точки B и C лежат на изогоналях, поэтому по лемме

$$\frac{x_B x_C}{y_B y_C} = 1.$$

По теореме Менелая для треугольника APC и прямой BD

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2} = 1.$$

Аналогично для треугольника ABQ и прямой PD

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} \cdot \frac{d_1 + d_2}{d_1} \cdot \frac{b_2}{b_1 + b_2} = 1.$$

Перемножим почленно два последних равенства и получим равенство (8). Следовательно, $M = 1$, а по лемме это равносильно тому, что OP и OQ – изогонали.

Теорема доказана.

Интересно, а что будет, если в условиях теоремы прямые AB и CD не пересекаются? Ответ дает такой вариант теоремы об изогоналях.

Обобщение теоремы об изогоналях (включая случай параллельных прямых). *Пусть OB и OC – изогонали угла AOD. Прямые AC и BD пересекаются в точке Q.*

1) Пусть AB пересекает CD в точке P.

2) Если $AB \parallel CD$, то рассмотрим луч OP, параллельный AB (рис. 14).

Тогда OP и OQ – также изогонали относительно угла AOD.

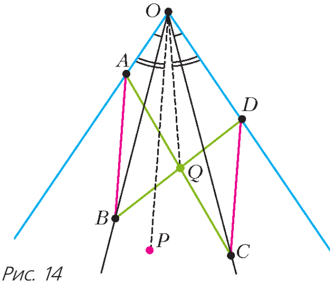

Рис. 14

Доказательство. Пункт первый мы уже доказали, рассмотрим теперь второй случай, когда $AB \parallel CD$. Пусть OP_1 и OQ – изогонали. Предположим, что прямая OP_1 пересекает прямую AB в точке P'. Тогда по пункту 1 нашей теоремы P' лежит на CD, т.е. AB пересекает CD в точке P', что противоречит условию $AB \parallel CD$. Следовательно, $OP_1 \parallel AB \parallel CD$, т.е. изогональ к OQ совпала с OP.

Случай параллельных прямых

Теперь мы можем рассмотреть применение теоремы об изогоналях, когда прямые AB и CD в условиях теоремы не пересекаются.

Задача 10. *Пусть BA_1 и BC_1 – внешние биссектрисы угла B треугольника ABC, $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$ (рис. 15). Докажите, что A_1C и C_1A пересекаются на биссектрисе угла ABC.*

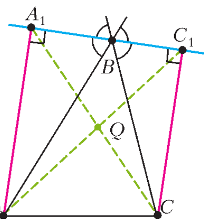

Рис. 15

Решение. Заметим, что углы A_1BA и C_1BC равны. Тогда BA и BC – изогонали развернутого угла A_1BC_1. Пусть A_1C пересекает AC_1 в точке Q. Поскольку $A_1A \parallel C_1C$, то по теореме об изогоналях вторая изогональ к BQ должна быть параллельна A_1A. Но биссектриса угла ABC перпендикулярна внешним биссектрисам, поэтому она параллельна прямым A_1A и C_1C и является второй изогональю к BQ. Тогда изогональ BQ тоже должна совпасть с биссектрисой угла ABC, т.е. точка Q лежит на биссектрисе угла ABC.

Следующая задача предлагалась на Международную олимпиаду 2007 года (ShortList), но не вошла в основной список.

Задача 11. *Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P (рис.16). Точка Q*

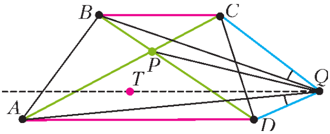

Рис. 16

лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle AQD = \angle CQB$ и прямая CD разделяет точки P и Q. Докажите, что $\angle BQP = \angle DAQ$.

Решение. По теореме об изогоналях для угла CQD, изогональ QT к лучу QP должна быть параллельна AD. Но тогда $\angle BQP = \angle AQT = \angle DAQ$, что и требовалось доказать.

Следующая задача была в 2011/12 учебном году на региональном этапе Всероссийской олимпиады в 10 классе под №8, т.е. считалась самой сложной.

Задача 12. *В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O – точка пересечения диагоналей (рис. 17,а). На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.*

Решение. Предположим, что углы BSC и ASD не равны. Рассмотрим точку E на стороне AD такую, что $\angle BSC = \angle ESD$ (рис. 17,*б*). Пусть AD пересекает CE в точке O_1. Тогда, по теореме об изогоналях, SO_1 и SH – изогонали. Вспомним, что высота SH и диаметр SO описанной окружности треугольника CSD – тоже изогонали угла CSD. Следовательно, точка O_1 совпадает с точкой O, точка E совпадет с A, и $\angle BSC = \angle ASD$.

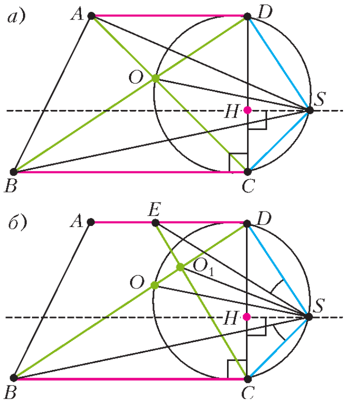

Рис. 17

Добавление

Приведем еще одно обобщение основной теоремы – из книги А.В.Акопяна, А.А.Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка» [6].

Теорема. *Пусть в треугольнике ABC даны две пары изогонально сопряженных точек X, X' и Y, Y' (рис.18). Тогда точки*

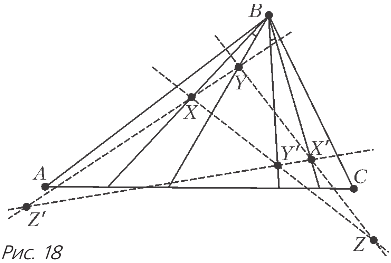

Рис. 18

пересечения XY с $X'Y'$ и XY' с $X'Y$ тоже изогонально сопряжены.

Доказательство. Рассмотрим угол XBX', Y и Y' – точки на изогоналях угла XBX' ($\angle ABX = \angle CBX'$ и $\angle ABY = \angle CBY'$, следовательно, BY и BY' – изогонали в $\angle XBX'$), а X и X' – точки на сторонах угла XBX'. Точки Z и Z' – пересечение прямых $X'Y$ и $Y'X$, $Y'X'$ и XY. По теореме об изогоналях, BZ и BZ' – изогонали угла XBX', а также и угла ABC. Аналогично, AZ, AZ' и CZ, CZ' – изогонали в углах BAC и BCA соответственно. Следовательно, точки Z и Z' изогонально сопряжены.

Существуют и другие идеи доказательства основной теоремы. Например, в докладе А.Куликовой на ММКШ [1] использовались двойные отношения точек и свойства центрального проектирования, что позволило сильно сократить доказательство.

И.Фролов сообщил нам, что после полярного преобразования с центром O теорема об изогоналях превращается в следующий факт:

Пусть в четырехугольнике $KLMN$ биссектрисы углов между парами прямых KL и MN, KM и LN параллельны (это условие эквивалентно вписанности четырехугольника). Тогда им параллельна и биссектриса угла между прямыми KN и ML.

От П.Кожевникова мы узнали, что при подходящей центральной проекции в пространстве точка O уйдет на бесконечность, а пары прямых OA и OD, OB и OC, OP и OQ (рис.19) станут параллельными прямыми, симметричными относительно фиксированной прямой (прямой Гаусса), которая проходит через середины отрезков AD, BC, PQ.

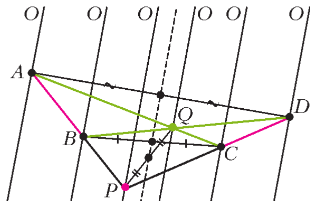

Рис. 19

Список литературы

1. Московская математическая конференция школьников (ММКШ). (https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/notes.htm)

2. *П.Кожевников.* Изогонально сопряженные точки. – «Квант», 2016, №1.

3. *Д.Прокопенко.* Изогональное сопряжение и педальные треугольники. – «Квант», 2017, №9.

4. Сайт Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина: geometry.ru.

5. *А.В.Акопян.* Геометрия в картинках. – М., 2017.

6. *А.В.Акопян, А.А.Заславский.* Геометрические свойства кривых второго порядка. – М.: МЦНМО, 2007.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Маятник Капицы

С.ДВОРЯНИНОВ

Удивление – мать познания.

Приписывается Аристотелю

СЕЙЧАС МЫ РАССКАЖЕМ ОБ ОДНОМ ИНтересном физическом явлении. Более того – оно удивительно, и на этом основании попало в книгу В.И.Арнольда «Математическое понимание природы. Очерки удивительных физических явлений и их понимание математиками (с рисунками автора)». Речь пойдет о маятнике.

Обычно маятник рисуют так, как показано на рисунке 1. На длинной нити подвешено небольшое тело, которое совершает колебания. Такой маятник называют математическим. Нижнее положение равновесия маятника устойчиво. Вместо нити можно взять стержень – у нас будет именно такой маятник.

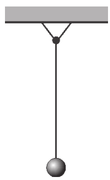

Рис. 1

А теперь перевернем маятник, заставим его стоять, как пишет Арнольд, «вверх ногами» (рис.2). У такого маятника прежняя точка подвеса превращается в точку опоры, но мы по традиции будем называть ее точкой подвеса. Хорошо известно, что поставить такой маятник вертикально не удается – или влево, или вправо он обязательно упадет. Если все же получится зафиксировать его в вертикальном положении, то малейшее сотрясе-

Рис. 2