Угол между хордами. Теорема трилистника.

Занятие кружка 9 класса.

Прокопенко Д.В., ФМШ 2007, 2019 год

На наш взгляд изучение геометрических конструкций является одним из наиболее эффективных способов обучения. Подборки задач на одну конструкцию тренируют умение видеть чертеж, находить знакомые ориентиры при решении задач, помогают налаживать связи между внешне непохожими задачи. В конце статьи для удобства приведены условия всех задач.

В качестве повторения сначала докажем основную формулу, которой будем пользоваться при решении задач.

Формула угла между хордами. Пусть хорды окружности AB и CD пересекаются в точке E и высекают на ней дуги α и β (рис.1). Тогда угол между хордами вычисляется по формуле $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

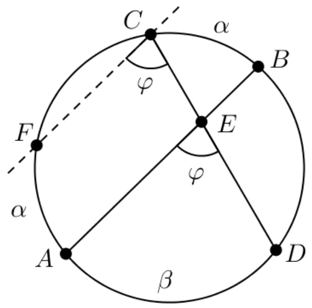

Рис.1

Доказательство: проведем хорду $CF \parallel AB$. Параллельные прямые высекают на окружности равные дуги. Следовательно, дуга FA равна α. Тогда вписанный угол $\angle DCF = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Соответствующие углы при параллельных прямых AB и CF равны, $\angle DCF = \angle DEA = \varphi$. Следовательно, $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ч.т.д.

Первые четыре задачи занятия носят учебный характер. Мы будем пользоваться одним и тем же полезным приемом: обозначаем равные дуги одинаковыми буквами и находим угол между хордами по формуле.

Задачи 5-8 взяты из книги "Областные олимпиады" [1]. Их довольно сложно решить по отдельности. В своих вариантах эти задачи были под звездочкой, т.е их решило не так много участников олимпиады. Оказывается, что всех их объединяет одна и та же конструкция. Перейдем к решению задач.

1. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и F. Докажите, что $FECD$ — вписанный четырёхугольник.

Решение: обозначим дуги *BM*, *MA* и *AD* через α и β (рис. 2). Тогда $\angle DCM = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

$2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 360°$. По формуле угла между хордами $\angle AED = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \angle DCM$. Тогда $\angle FED + \angle DCM = 180°$. Следовательно, четырёхугольник *FECD* — вписанный.

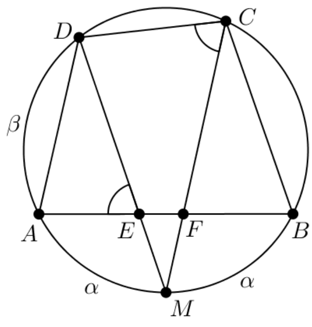

Рис. 2

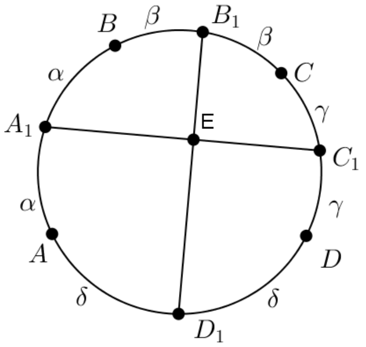

Рис. 3

2. На окружности даны точки *A*, *B*, *C*, *D* в указанном порядке: A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины дуг *AB*, *BC*, *CD* и *DA* соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

Решение: обозначим равные дуги одними буквами (рис 3). Тогда $2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 360°$. По формуле угла между хордами $\angle A_1ED_1 = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$.

3. Диагонали вписанного четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *E*. Пусть точки *M* и *N* – середины дуг *CD* и *AB*. Докажите, что прямая *MN* параллельна биссектрисе угла *AEB* (рис. 4).

Решение:

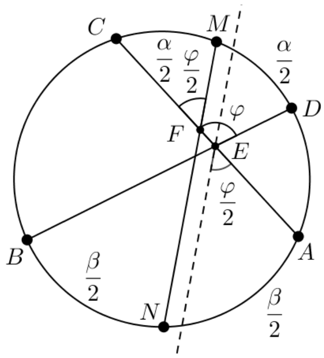

Рис. 4

Пусть хорды *MN* и *AC* пересекаются в точке *F*. По формуле угла между хордами $\angle DEC = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\angle CFM = \frac{1}{2}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = \frac{\angle DEC}{2}$. Следовательно, прямая *FM* параллельна биссектрисе угла *AEB*.

Этот факт нам потребуется в других задачах.

4. **Теорема трилистника.** Пусть продолжение биссектрисы угла *C* пересекает описанную окружность треугольника *ABC* в точке *W*. Докажите равенство: *WA* = *WB* = *WI*, где *I* – центр вписанной окружности.

Известны разные способы доказательства, но мы еще раз воспользуемся формулой угла между хордами.

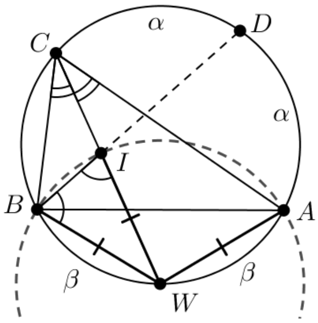

Рис. 5

Пусть биссектриса BI пересекает описанную окружность в точке D. Тогда $WA = WB$. Обозначим равные дуги одними буквами (рис 5). Тогда $\angle DBW = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. По формуле угла между хордами $\angle BIW = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, т.е. $\angle IBW = \angle BIW$. Следовательно, треугольник BIW – равнобедренный, ч.т.д.

Окружность с центром в середине дуги AB и проходящую через вершины A и B (а также еще две аналогично построенные окружности) мы будем иногда называть *окружностями трилистника*.

Доказанная теорема позволяет нам сформулировать **признак центра вписанной окружности** треугольника как одну из точек пересечения двух окружностей трилистника.

Эту красивую теорему полезно, знать. Например, в следующей задаче, которую решали участники областных олимпиад 1999 года десятого класса, она является ключом к решению.

5. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E (рис. 6). Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а O_2 — центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Докажите, что прямая O_1O_2 отсекает от треугольника AEB равнобедренный треугольник. (М. Сонкин, [1], №203, 1999-2000 г., 10.3*)

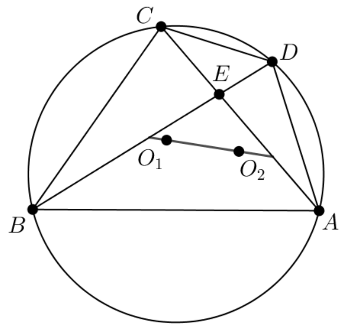

Рис. 6

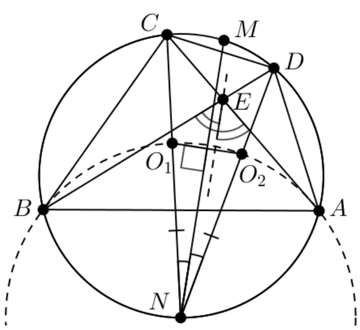

Рис. 7

Решение: пусть M и N – середины дуг CD и AB (рис.7). По теореме трилистника $O_1N = AN = O_2N$.

I способ. Воспользуемся теоремой трилистника и задачами 2, 3 как леммами.

Поскольку M – середина дуги CD, то NM – биссектриса угла O_1NO_2. Треугольник O_1NO_2 – равнобедренный. Следовательно, биссектриса NM перпендикулярна O_1O_2. По задаче 3 прямая NM параллельна биссектрисе угла AEB. Следовательно, прямая O_1O_2 перпендикулярна биссектрисе угла AEB и отсекает от треугольника AEB равнобедренный треугольник ч.т.д.

А что делать, если мы не знаем задачу 3? Посчитаем углы.

II способ (углы между хордами).

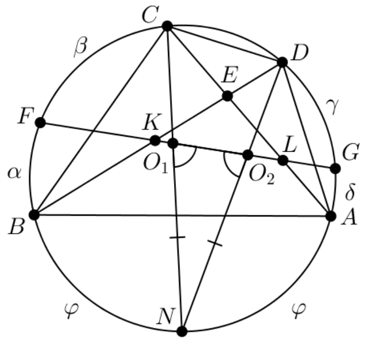

Рис. 8

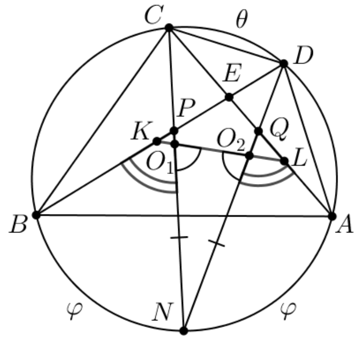

Рис. 9

Обозначим дуги BF, FC, DG, GA, AN и NB (рис. 8). По формуле угла между хордами NC и FG $\angle NO_1G = \frac{1}{2}(\beta + \delta + \varphi)$, между хордами ND и FG $\angle NO_2F = \frac{1}{2}(\alpha + \varphi + \gamma)$. В равнобедренном треугольнике O_1NO_2 углы O_1 и O_2 равны. Тогда $\alpha + \varphi + \gamma = \beta + \delta + \varphi$, и теперь $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Заметим, что $\angle DKG = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, $\angle CLF = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$. Теперь получим, что $\angle DKG = \angle CLF$, т.е. треугольник EKL – равнобедренный ч.т.д.

Приведем также более короткий способ счета углов, который нашли школьники на кружке.

III способ. Пусть отрезки BD и CN пересекаются в точке P, а AC и DN – в точке Q, дуга CD равна θ (рис. 9).

По формуле угла между хордами $\angle BPN = \frac{1}{2}(\varphi + \theta)$, $\angle AQN = \frac{1}{2}(\varphi + \theta)$, следовательно,

$\angle BPN = \angle AQN$ (1). Вспомним, что треугольник NO_1O_2 – равнобедренный, и углы O_1 и O_2 равны. Из этого с учетом (1) получим, что в треугольниках KO_1P и LO_2Q равны две пары углов, следовательно, равны углы при вершинах K и L. Тогда получим, что треугольник KEL – равнобедренный. Доказано.

6. AA_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AA_1C и CC_1A, пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y. Докажите, что $BX = BY$. (Открытая олимпиада ФМЛ №239, 8, 9 класс, №2, 2000 год).

7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABD, ABC, BCD и ACD, являются вершинами прямоугольника.

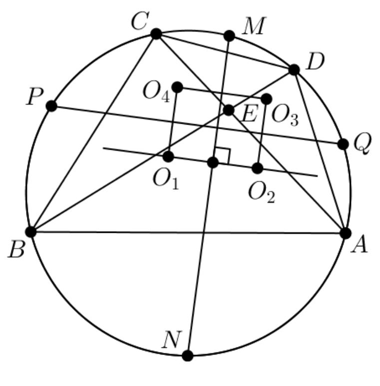

Рис.10

Доказательство: пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, ABD, ACD и BCD соответственно. Отметим также середины полученных дуг N, P, M и Q (см. рис.10).

Решая задачу 5, мы выяснили, что прямые O_1O_2 и MN – перпендикулярны. Аналогично, все стороны четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ – перпендикулярны соответственно прямым NM и PQ. По задаче 2 прямые NM и PQ — перпендикулярны. Следовательно, $O_1O_2O_3O_4$ — прямоугольник.

8. Центры четырех окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 лежат на окружности S. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и B_1, окружности S_2 и S_3 — в точках A_2 и B_2, окружности S_3 и S_4 — в точках A_3 и B_3, окружности S_4 и S_1 — в точках A_4 и B_4, причем точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на окружности S, а точки B_1, B_2, B_3 и B_4 различны и лежат внутри окружности S (рис. 11). Докажите, что $B_1B_2B_3B_4$ — прямоугольник. ([1], №19, 1993-1994 г., 11.3*)

Решение: изобразим на чертеже все, что дано в условии (рис. 11).

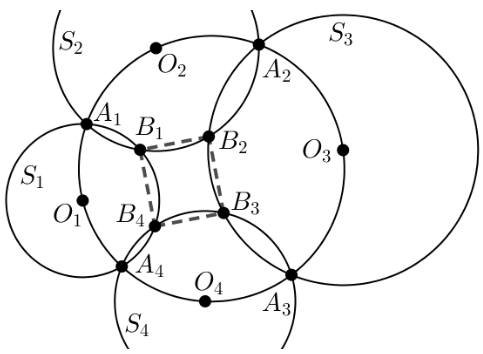

Рис.11

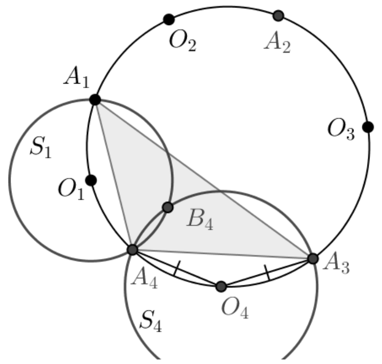

Рис.12

На таком сложном рисунке решить задачу практически невозможно. Воспользуемся характерным приемом. Удалим все окружности и точки B_1, …, B_4. Получим уже знакомый нам чертеж по задаче 2 (рис.3). На окружности расставлены точки A_1, …, A_4 и отмечены середины дуг между ними – точки O_1, …, O_4. Рассмотрим сначала треугольник $A_1A_3A_4$ (рис.12). Вернем окружности S_1 и S_4. Они пересекаются в точках A_4 и B_4. Заметим, что S_1 и S_4 – окружности трилистника для треугольника $A_1A_3A_4$. Мы знаем, что они пересекаются в центре вписанной окружности этого треугольника, по условию – в точке B_4. Итак, точки B_1, …, B_4 являются центрами вписанных окружностей для всевозможных треугольников с вершинами в точках A_1, …, A_4. Эту задачу мы уже решали. Узнали задачу 7?

9. Пусть A_1 и A_2 — точки пересечения окружностей S_1 и S_2, B_1 и B_2 — точки пересечения окружностей S_2 и S_3 и O_1, O_2, O_3 — соответственно центры окружностей S_1, S_2 и S_3. Докажите, что если точки O_1, A_1, O_2, B_1, O_3 лежат на одной окружности, то отрезок A_2B_2 параллелен отрезку O_1O_3. (Л. Емельянов, Областные олимпиады, №203, 1999-2000 г., 10.3*)

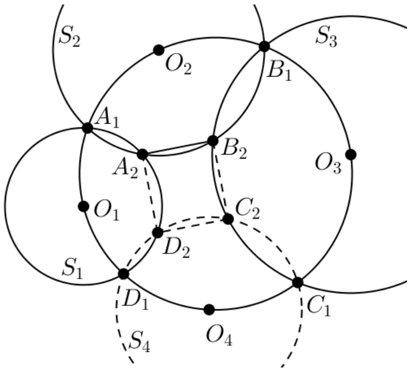

Рис.13

Решение: обозначим окружность, на которой лежат точки O_1, O_2 и O_3 как S (рис.13). Пусть окружности S_1 и S_3 повторно пересекают окружность S в точках C_1 и D_1, O_4 – середина дуги A_3A_4. Пусть окружность S_4, с центром O_4 и проходящая через точки C_1 и D_1, пересекает повторно окружности S_1 и S_3 в точках C_2 и D_2, отличных от C_1 и D_1.

Теперь хорошо видно полное совпадение рис.13 и рис.11 задачи 8. По задаче 7 соответствующие стороны четырехугольника $A_2B_2C_2D_2$ параллельны прямым O_1O_3 и O_2O_4. Следовательно, прямая A_2B_2 параллельна O_1O_3. Доказано.

Задачу 6 с Открытой олимпиады ФМЛ №239 за 2000 год оставим читателю в качестве упражнения.

Приведем полностью весь листок с задачами.

1. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и F. Докажите, что $FECD$ — вписанный четырёхугольник.
2. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке; A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $A_1C_1 \perp B_1D_1$.
3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть точки M и N – середины дуг CD и AB. Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AEB.
4. **Теорема трилистника.** Пусть продолжение биссектрисы угла C пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке W. Докажите равенство: $WA = WB = WI$, где I – центр вписанной окружности.
5. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E (рис. 14). Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а O_2 — центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Докажите, что прямая O_1O_2 отсекает от треугольника AEB равнобедренный треугольник.

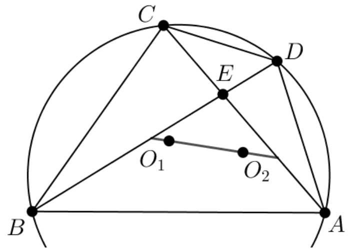

Рис. 14

6. AA_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AA_1C и CC_1A, пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y. Докажите, что $BX=BY$.*Открытая олимпиада ФМЛ №239, 2000 год.*

7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABD, ABC, BCD и ACD, являются вершинами прямоугольника.

8. Центры четырех окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 лежат на окружности S. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и B_1, окружности S_2 и S_3 — в точках A_2 и B_2, окружности S_3 и S_4 — в точках A_3 и B_3, окружности S_4 и S_1 — в точках A_4 и B_4, причем точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на окружности S, а точки B_1, B_2, B_3 и B_4 различны и лежат внутри окружности S. Докажите, что $B_1B_2B_3B_4$ — прямоугольник.

9. Пусть A_1 и A_2 — точки пересечения окружностей S_1 и S_2, B_1 и B_2 — точки пересечения окружностей S_2 и S_3 и O_1, O_2, O_3 — соответственно центры окружностей S_1, S_2 и S_3. Докажите, что если точки O_1, A_1, O_2, B_1, O_3 лежат на одной окружности, то отрезок A_2B_2 параллелен отрезку O_1O_3.

Литература:

[1] Областные олимпиады. 8—11 классы, Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др. — М. : Просвещение, 2010.