Д.В.Прокопенко
ФМШ №2007, г. Москва

Кружок по планиметрии для школьников 9 – 11-х классов

В нашей школе учителя столкнулись с проблемой отсутствия интереса к геометрии. Проблема эта довольно общая и характерна для школьного образования в целом. Как следствие, ученики не только не очень хорошо решают олимпиадные задачи по геометрии, но и часто неуверенно ориентируются в базовом курсе. Чтобы исправить ситуацию, в нашей школе в прошлом году организовали кружок по геометрии (планиметрии) для 9 – 11-х классов.

Основное время занятий отводится на решение листков с задачами (до 10 задач на каждом), объединенных по темам; внутри листка задачи располагаются по возрастанию сложности. Чтобы перейти к следующему листку, ученик должен сдать все задачи, кроме задач повышенной сложности, отмеченных звездочкой.

Задачи первых листков связаны с окружностями. На эту тему можно подобрать задачи любой сложности, с короткими и красивыми решениями, к тому же есть много ярких фактов.

Первое, что было заметно – это неумение сделать грамотный чертеж, который действительно помог бы решить задачу. Поэтому на первых занятиях приходилось долго обсуждать, как правильно построить чертеж, с чего начать. Типичная ситуация: в задаче сказано: «Вокруг треугольника описана окружность …». Ученик рисует треугольник, потом начинает решать задачу на построение – описать окружность вокруг треугольника. Самые терпеливые берут в руки циркуль и тратят на это несколько минут. Однако, гораздо проще сделать наоборот – нарисовать окружность и вписать в нее треугольник. Или, например, в той же задаче необходимо провести биссектрису внутреннего угла. Можно, конечно, на глазок делить пополам угол, но гораздо точнее соединить вершину и середину противолежащей дуги, т.е. воспользоваться свойством вписанных углов – равные углы опираются на равные дуги. И таких деталей довольно много. Через некоторое время, после того как были «открыты» эти удобные правила, качество чертежей заметно улучшилось. Более того, стало возможным принимать некоторые задачи без подробной записи, если на чертеже был отображен весь ход решения, отмечены равные углы, стороны и т.д.

В начале занятия обычно 10-20 мин обсуждаем решение наиболее сложных задач. Если такой необходимости нет, доказываем разными способами теоремы школьного курса или красивые и простые геометрические факты, на подробный разбор которых во время школьных занятий учителю не хватает времени. Поскольку задачи простые, в их решении принимают активное участие практически все учащиеся. Различные методы доказательства позволяют связать данную теорему с другими, указать ее место в общем курсе, и даже установить новые для учащихся факты. Бывает и наоборот, в новой конструкции можно разглядеть знакомые очертания, тогда это повод для повторения и очередная тренировка в умении видеть чертеж.

Дополнительные построения часто выглядят для школьников как фокус, поэтому целесообразно уделять этому больше внимания и особенно эффективно это показывать в простых задачах. С этой целью можно рекомендовать книгу И.Кушнира «Альтернативные способы решения задач (геометрия)», изданную в Киеве в 2006 году, в Москве ее, к сожалению, пока нет в продаже.

Большой интерес на кружке вызвали задачи на степень точки относительно окружности. В задачах вводится и используется понятие радикальной оси (радикальной точки) двух (трех) пересекающихся окружностей как множества точек, степень которых относительно окружностей равны. В итоге мы получили мощный инструмент для доказательства того, что три точки лежат на одной прямой и три прямые проходят через одну точку.

В начале занятия по этой теме целесообразно повторить теорему о произведении отрезков секущей к окружности.

Рассмотрим задачи:

1. *Степень точки A относительно окружности равна* $d^2 - R^2$, *где d – расстояние от точки A до центра окружности, R – ее радиус.*

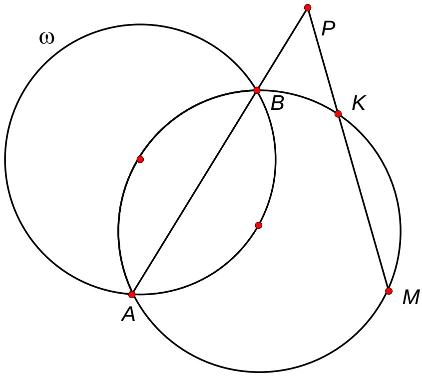
2. *Пусть степень точки имеет положительное значение* t^2. *Дайте геометрическую интерпретацию длины t.*

3. *Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB, вне окружностей. Докажите, что длины всех*

касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

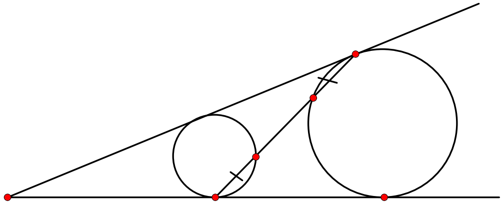
4. *Две окружности пересекаются в точках A и B; MK – общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MK пополам.*

5. *Дана окружность ω и точки P и K вне ее. Через точку P проведена секущая к окружности ω, пересекающая ее в точках A и B. Докажите, что вторая точка пересечения прямой PK с окружностью, проходящей через точки K, A, B, не зависят от выбора секущей AB.*



6. *Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.*

7. *В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая в точках M и K. Докажите, что прямая AK высекает на этих окружностях равные хорды.*



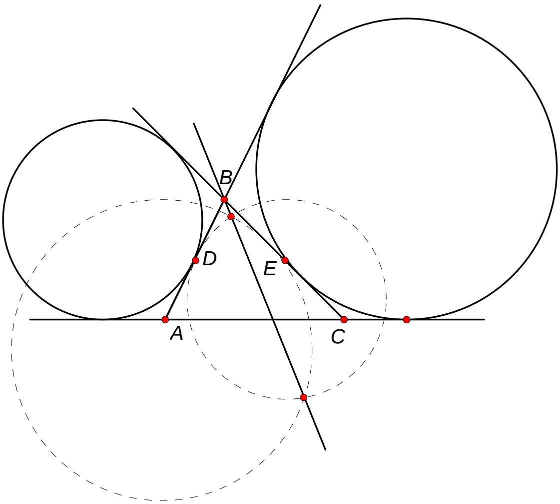
8*. *Постройте на данной прямой точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.*

9. *Вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон BA и BC, отразили относительно середин этих сторон.*

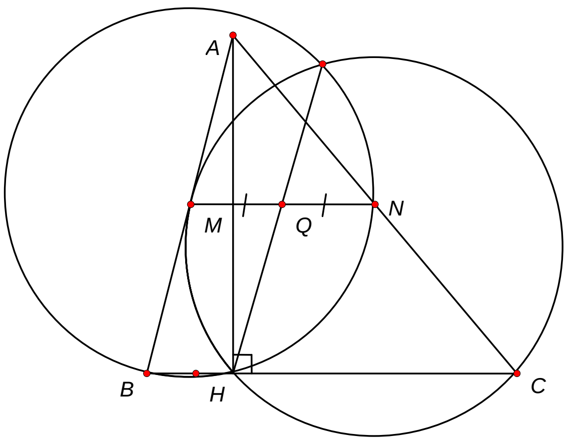
Докажите, что общая хорда получившихся окружностей

а) проходит через точку B;

б) делит периметр треугольника пополам.*



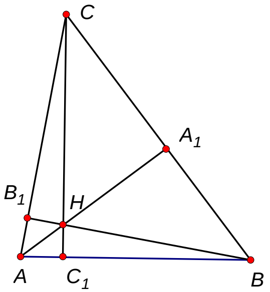
10. *В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и AC, AH – высота. Окружности, описанные вокруг треугольников BHN и CHM, пересекаются вторично в точке P. Докажите, что отрезок PH проходит через середину MN.*



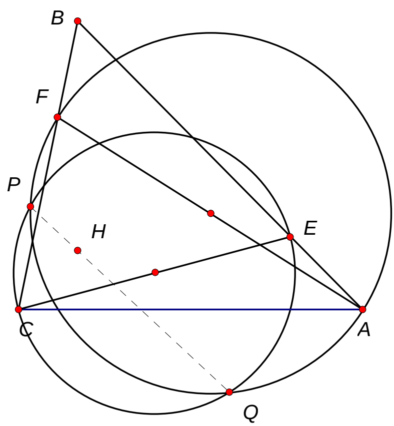
Когда большая часть учеников решит первые две задачи, мы обязательно обсуждаем решения вместе, объединяя их одной полезной идеей: у нас есть постоянная величина (произведение отрезков секущих), как ее посчитать, какой в ней геометрический смысл? Выберем наиболее удобные для расчета положения секущей. Это будет предельное положение, когда секущая переходит в касательную, а длины отрезков при этом будут равны и второе направление – вдоль оси симметрии. Задачи №9 и 10 взяты из Всероссийских олимпиад 2005 и 2007 годов, 10 и 9 класс соответственно.

Задачи разных листков обычно связаны между собой. Рассмотрим, например, две задачи о свойствах ортоцентра:

7. *Доказать, что произведение длин отрезков, на которые ортоцентр разбивает высоты треугольника, одинаково для всех высот.*



8. *Если две окружности построены на двух чевианах как на диаметрах, то их точки пересечения и ортоцентр лежат на одно прямой.*



В доказательстве задачи 7 используется задача 1 того же листка: *Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны принадлежит описанной окружности* а также факт, что искомое произведение в два раза меньше, чем степень ортоцентра относительно описанной окружности. В задаче 8 (с помощью задачи 7) надо доказать, что степень ортоцентра относительно этих окружностей равны. Тем, кто решил эти задачи, предлагается подумать, что будет в случае трех окружностей. Результат они должны сформулировать самостоятельно. На учеников производит сильное впечатление противоречие между сложностью задачи и тем, что они придумали и решили ее за несколько минут. Они при этом забывают, что сначала они решили целый листок на степень точки, а потом все задачи о свойствах ортоцентра. Мы надеемся, что такая эмоциональная составляющая занятий способствует повышению интереса к геометрии.

В 10 классе мы решаем задачи на преобразования. Это очень мощное средство, которое надо уметь применять. По возможности вводятся классические задачи, например, точка Торричелли, задача Фаньяно. В этом случае, конечно, уместно упомянуть авторов, историю задачи.

Последние занятия кружка в конце учебного года мы посвятили повторению. Например, доказывали теорему Птолемея с использованием прямой Симпсона и формулы для сторон педального треугольника; доказали, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, используя более привычное доказательство (его называют способ Гаусса) через серединный треугольник (пересечение серединных перпендикуляров) и через вневписанные окружности (пересечение биссектрис). В последнем случае повторили свойство биссектрис внутреннего и внешнего угла. Кроме того, поскольку вершины исходного треугольника являются основаниями высот треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей, получили как следствие свойство ортотреугольника, что его стороны образуют равные углы со сторонами треугольника. Некоторым ученикам 9 класса это принесло пользу при подготовке и сдаче экзамена по геометрии.

Автор благодарен за П.В. Чулкову, А.Д. Блинкову за ценную критику, Ю.А. Блинкову за предоставленные материалы для проведения нескольких занятий кружка.