

# ЭКЗАМЕН ПО ГЕОМЕТРИИ

## 11 КЛАСС

### ЧАСТЬ I. Координаты и векторы

1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1;3;5)$  параллельно векторам  $\vec{a} = (1;-1;5)$  и  $\vec{b} = (-4;3;0)$ .
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-3;7;1)$  и  $B(-2;8;1)$  параллельно вектору  $\vec{c} = (1;0;5)$ .
3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки  $A(5;-6;1)$ ,  $B(1;8;0)$  и  $A(0;2;0)$ .
4. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку  $N(4;0;-1)$  параллельно плоскости  $\alpha$ :  $3x - y + 5z - 1 = 0$ .
5. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку  $N(2;0;-3)$  перпендикулярно к двум плоскостям  $\alpha$ :  $5x - y + z - 1 = 0$  и  $\beta$ :  $x + 2z - 1 = 0$ .
6. Найдите расстояние между плоскостью  $2x - 2y - z + 3 = 0$  и точкой  $A(0;2;2)$ , а также угол между этой плоскостью и прямой  $OA$ , где  $O$  – начало координат.
7. На плоскости  $x + 2y + 3z = 25$  найдите точку, наименее удаленную от точки  $A(2;-3;5)$ .
8. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1;-1;2)$  и перпендикулярной вектору  $\vec{n} = (5;4;-2)$ .
9. Даны точки  $A(0;2;-5)$  и  $B(3;-1;8)$ . Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $K(3;1;0)$  перпендикулярно вектору  $\overline{AB}$ .
10. Найдите расстояние между параллельными плоскостями  $\alpha$ :  $6x - 3y - 2z - 14 = 0$  и  $\beta$ :  $6x - 3y - 2z + 4 = 0$ .
11. Определите величину угла между прямыми  $c$ :  $\begin{cases} x + y - z + 11 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0, \end{cases}$  и  $d$ :  $\begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$
12. Определите величину угла между плоскостями  $\alpha$ :  $2x - y + 5z - 3 = 0$  и  $\beta$ :  $x - 3y + 4z + 20 = 0$ .
13. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины.
14. Докажите, что точка  $M$  является центроидом тетраэдра  $ABCD$  тогда и только тогда, когда  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 0$ .
15. Основанием пирамиды  $SABCD$  служит параллелограмм. Проведена плоскость, пересекающая боковые ребра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  и  $SD$  пирамиды соответственно в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  таких, что  $SK = \frac{1}{k}SA$ ,  $SL = \frac{1}{l}SB$ ,  $SM = \frac{1}{m}SC$ ,  $SN = \frac{1}{n}SD$ . Найдите зависимость между числами  $k$ ,  $l$ ,  $m$  и  $n$ .
16. Выразите длину медианы  $DM_1$  тетраэдра  $ABCD$  через длины его ребер.

17. Боковые грани правильной шестиугольной призмы – квадраты. Найдите величину угла между скрещивающимися диагоналями смежных граней призмы.
18. Постройте общий перпендикуляр скрещивающихся диагоналей двух смежных граней куба. Найдите расстояние между этими диагоналями, если ребро куба равно 1.
19. Докажите, что центры граней тетраэдра являются вершинами тетраэдра, гомотетичного данному. Укажите центр гомотетии и коэффициент гомотетии.
20. Дана сфера радиуса  $R$  с центром  $O$ . Через точку  $M$ , не принадлежащую сфере, проведена прямая, пересекающая сферу в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что  $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$ .
21. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы заключающих ее сторон. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для тетраэдра.
22. Дана правильная четырехугольная пирамида  $SABCD$ , каждое ребро которой равно 1. Постройте общий перпендикуляр  $MN$  прямых  $AB$  и  $SC$  и найдите его длину. В каком отношении точки  $M$  и  $N$  делят отрезки  $AB$  и  $SC$ ?
23. Докажите, что высоты тетраэдра или их продолжения пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны.
24. Дан тетраэдр  $ABCD$ , у которого все плоские углы при вершине  $D$  прямые,  $DA = a$ ,  $DB = b$ ,  $DC = c$ ,  $DH = h$ , где  $DH$  – высота тетраэдра. Докажите, что  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .
25. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между плоскостями  $ABD_1$  и  $B_1 CD_1$ .
26. Прямая, выходящая из начала координат, образует с координатными осями углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Найдите значение выражения  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ .
27. Найдите на трех попарно скрещивающихся ребрах куба такие точки  $K$ ,  $L$  и  $M$ , сумма квадратов расстояний между которыми наименьшая возможная.

## Часть 2. Другие методы.

1. Найти расстояние между двумя непересекающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно  $a$ .
2. В тетраэдре  $ABCD$  ребро  $AB = 6$ , ребро  $CD = 8$ , а остальные ребра равны  $\sqrt{74}$ . Найдите радиус описанного шара.
3. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит в некоторой плоскости  $\gamma$ , а катеты составляют с этой плоскостью углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Определите угол между плоскостью  $\gamma$  и плоскостью треугольника.
4. Около шара описана правильная треугольная призма, а около призмы описан шар. Найдите отношение площадей поверхностей этих шаров.
5. В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна  $a$ , а боковое ребро равно  $3a$ , проведено сечение параллельно боковому ребру. Найдите площадь этого сечения, если оно является ромбом.

6. Найдите площадь сечения куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей грани  $ABCD$  параллельно прямым  $AB_1$  и  $BK$ , где  $K$  – середина ребра  $CC_1$ , если ребро куба равно  $a$ .
7. В правильную усеченную треугольную пирамиду вписан шар радиуса  $r$ . Боковое ребро пирамиды равно стороне меньшего основания. Найти объем пирамиды.
8. В пирамиде  $SABC$  известны длины всех ребер:  $SC = SB = AB = 17$ ,  $BC = SA = 8$ ,  $AC = 15$ . Найдите объем пирамиды.
9. В треугольной пирамиде  $ABCD$   $AC = 4$ ,  $BC = 3$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ . Ребро  $AD$  длиной 12 перпендикулярно плоскости  $ABC$ . Найдите радиус описанной около пирамиды сферы.
10. Найдите боковое ребро правильной усеченной четырехугольной пирамиды со сторонами оснований  $a$  и  $b$ , если в пирамиду можно вписать шар.
11. Найдите отношение объемов параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и треугольной пирамиды  $BDC_1 A_1$ .
12. Центры тяжести граней треугольной пирамиды являются вершинами многогранника. Найдите отношение объемов пирамиды и многогранника.
13. В правильной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  ребро  $AB$  равно  $a$ , угол между ребрами  $AB_1$  и  $DB$  равен  $\alpha$ . Найдите площадь поверхности шара, проходящего через точки  $B$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $A_1$ .
14. В полушар вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите отношение объема этого цилиндра к объему полушара.
15. В куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вписан шар радиуса  $R$ . Найдите площадь сечения шара плоскостью  $AD_1 C$ .
16. В правильную усеченную треугольную пирамиду вписан шар радиуса  $r$ . Боковое ребро пирамиды равно стороне меньшего основания. Найти объем пирамиды.
17. Высоту конуса разделили на пять равных частей и через каждую точку деления провели плоскость, параллельную основанию. Объем части, заключенной между вторым и третьим сечениями, равен  $V$ . Найдите объем конуса.
18. В призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  вершина  $A_1$  равноудалена от вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Боковое ребро равно 13, стороны основания  $AB = AC = 10$ ,  $CB = 12$ . Найдите полную поверхность призмы.
19. Образующая усеченного конуса наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ , а центр большего основания равноудален от меньшего основания и боковой поверхности конуса. Найдите объем усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равна  $2\pi$ .
20. Все ребра треугольной призмы касаются шара радиуса  $R$ . Найдите объем призмы.
21. Даны две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно  $x$ . Между ними расположен конус с образующей 25 см и радиусом основания 7 см так, что на каждой плоскости есть хотя бы одна точка конуса, а вне плоскостей таких точек нет. Найдите все возможные значения  $x$ .
22. Через точку  $M$ , лежащую в плоскости основания цилиндра с радиусом основания 3, высотой 3 и удаленную от оси цилиндра на расстояние 7, проведены всевозможные прямые, имеющие с цилиндром единственную общую точку. Какие значения может принимать длина отрезка такой прямой от

- точки  $M$  до общей точки прямой и цилиндра?
23. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной  $a$ . Длина бокового ребра –  $b$ . Одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы  $45^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
  24. Дан куб с ребром  $a$ . Второй куб получен поворотом первого на острый угол  $\alpha$  вокруг ребра. Определите объем общей части этих кубов.
  25. Высоту пирамиды разделили в отношении  $3:7$ , считая от вершины, и провели сечение, параллельное основанию. В каком отношении разделится объем пирамиды?
  26. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 7, 15 и 20. Боковые ребра пирамиды имеют равные длины, а центр описанного около пирамиды шара удален от плоскости основания на расстояние  $2\frac{13}{16}$ . Найдите объем пирамиды.
  27. Найдите двугранный угол при ребре основания правильной четырехугольной пирамиды, если плоскость, проведенная через сторону основания, делит этот угол и боковую поверхность пирамиды пополам.
  28. Основанием пирамиды, объем которой равен 4,8, является треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота составляет равные углы с боковыми гранями, а основание высоты лежит внутри основания пирамиды.
  29. Основание пирамиды — правильный шестиугольник. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости ее основания и равно стороне шестиугольника. Найдите: двугранные углы при ребрах основания пирамиды; углы наклона боковых ребер пирамиды к плоскости ее основания.
  30. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ , меньших  $45^\circ$ . Найдите угол наклона плоскости, проходящей через сторону основания и центр описанного около пирамиды шара, к плоскости основания пирамиды.
  31. Для правильного тетраэдра  $ABCD$  с ребром  $A$  определите расстояние от точки  $K$  – середины ребра  $AC$  – до плоскости  $BCD$  и угол между прямой  $KB$  и этой плоскостью.
  32. Все ребра наклонной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ , основание которой - правильный треугольник, равны  $a$ . Точка  $A_1$  равноудалена от  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Найдите расстояние от вершины  $A_1$  до плоскости  $BCC_1$  и угол, составленный с этой плоскостью прямой  $A_1C$ .
  33. В правильном тетраэдре  $ABCD$  точки  $K$  и  $L$  – середины ребер  $AD$  и  $BC$  соответственно. Найдите угол между  $KL$  и высотой  $CC_1$  треугольника  $ABC$ .
  34. Объем пирамиды  $ABCD$  равен  $V$ . Найдите объем пирамиды  $KNBP$ , если  $B$  – середина  $AP$ , точка  $K$  лежит на ребре  $AD$  и  $AK : KD = 3$ ,  $N$  — точка пересечения медиан грани  $BCD$ .
  35. Два прямоугольных неравных друг другу треугольника  $ABD$  и  $CBD$  имеют по равному острому углу  $\alpha$ , общий катет  $BD = a$  и общую вершину прямого угла  $D$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$  и расстояние между ними, если плоскости  $ABD$  и  $CBD$  взаимно перпендикулярны.
  36. Найдите расстояния и углы между диагональю  $AC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и каждой из скрещиваю-

щихся с ней диагональю граней этого куба, если ребро куба равно 1.

37. Точка  $K$  — середина стороны  $AD$  квадрата  $ABCD$  со стороной  $a$ . Квадрат «перегнули» по прямой  $KC$  так, что образовался двугранный угол величиной  $60^\circ$ . Найдите расстояние между точками  $B$  и  $D$ .
38. Внутри двугранного угла величиной  $\alpha$  меньшего  $90^\circ$  взята точка  $M$ , удаленная от граней двугранного угла на расстояния  $A$  и  $B$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до ребра двугранного угла.
39. Квадрат  $ACMD$  и правильный треугольник  $ABC$ , сторона которого равна,  $a$  расположены так, что двугранный угол  $M(AC)D$  равен  $120^\circ$ . Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости квадрата и от точки  $M$  до плоскости треугольника.
40. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDME$ . Найдите расстояние от плоскости  $SAB$  до каждой, не лежащей на ней вершины пирамиды, если точка пересечения медиан грани  $SDM$  удалена от плоскости  $SAB$  на 8 см.