

# Задачи для подготовки к экзамену по геометрии в 8 классе, 2023-2024

---

## 1 Вычисление элементов треугольника

В треугольнике  $ABC$  обозначим:

$O$  и  $I$  — центры описанной и вписанной окружностей соответственно, высота  $AH$ , биссектриса  $AL$ ,  $N$  — точка касания вневписанной окружности против вершины  $A$  с прямой  $AC$ .

Известно, что  $AB = 13$ ,  $BC = 14$ ,  $AC = 15$ .

Найдите: 1) отрезки, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника; 2)  $AN$ ; 3)  $BL : LC$ ; 4)  $BL, LC$ ; 5)  $AI : IL$ ; 6)  $AH$ .

## 2 Параллелограмм

1. Биссектриса угла параллелограмма делит его сторону на отрезки, равные  $a$  и  $b$ . Найдите периметр параллелограмма.
2. Стороны параллелограмма равны  $a$  и  $b$ . Найдите диагонали четырехугольника, образованного пересечениями биссектрис углов параллелограмма.
3. **Теорема Фалеса. (Точка пересечения медиан треугольника. Подобие.)**  
В параллелограмме  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $BC$  и  $CD$ . В каком отношении прямые  $AM$  и  $AN$  делят диагональ  $BD$ ?
4. В параллелограмме  $ABCD$   $M$  — середина стороны  $CD$ ,  $BH$  — перпендикуляр к прямой  $AM$ . Докажите, что треугольник  $BCH$  — равнобедренный.
5. Точка  $M$  — середина стороны  $CD$  параллелограмма  $ABCD$ . Точка  $K$  делит сторону  $BC$  на отрезки с длинами  $a$  и  $b$  так, что угол  $AMK$  равен  $90^\circ$ . Найдите длину отрезка  $AK$ .

## 3 Трапеция

6. Найдите углы вписанной и описанной трапеции, у которой длины оснований относятся как  $1 : 3$ .
7. Найдите высоту трапеции, если ее основания  $6$  см и  $26$  см, а боковые стороны равны  $12$  см и  $16$  см.
8. Найдите высоту трапеции, если ее основания равны  $5$  см и  $15$  см, а длины диагоналей —  $12$  см и  $16$  см. Чему равен угол между диагоналями?
9. В равнобокой трапеции основания равны  $2$  см и  $8$  см, а боковая сторона равна  $5$  см. Найдите высоту и диагональ трапеции.

10. Найдите высоту прямоугольной трапеции, если длины ее оснований 5 см и 8 см, а тупой угол равен  $120^\circ$ .
11. Трапеция с высотой  $h$  вписана в окружность. Боковая сторона трапеции видна из центра окружности под углом  $120^\circ$ . Найдите среднюю линию трапеции.
12. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна  $90^\circ$ . Известно, что длина оснований трапеции равна  $a$  и  $b$ . Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.
13. Докажите, что в равнобокой трапеции диагональ больше средней линии.
14. Две касающиеся окружности вписаны в один угол. Докажите, что точки их касания со сторонами угла являются вершинами а) трапеции; б) вписанной трапеции; в) описанной трапеции.

## 4 Теорема Пифагора

### 4.1 Окружность

15. Докажите, что расстояние от центра окружности до хорды уменьшается по мере увеличения длины хорды. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.
16. Длины двух параллельных хорд одной окружности равны 10 см и 24 см. Расстояние между ними равно 17 см. Найдите радиус окружности.
17. Общая хорда двух окружностей радиусов  $R$  и  $r$  равна  $a$ . Найдите расстояние между центрами окружностей.
18. Найдите расстояние от центра окружности радиуса 9 см до точки пересечения двух взаимно перпендикулярных хорд, длины которых равны 16 см и 14 см.

### 4.2 Разное

19. **Свойство биссектрисы.** Биссектриса  $CD$  прямого угла треугольника  $ABC$  делит гипотенузу на отрезки длины  $m$  и  $n$ . Найдите катеты треугольника.
20. **Удвоение медианы. Обратная теорема Пифагора.** Длины двух сторон треугольника равны 6 см и 8 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 5 см. Найдите угол между данными сторонами.
21. Медиана и высота прямоугольного треугольника, проведенные к гипотенузе, равны 25 см и 24 см соответственно. Найдите периметр треугольника.
22. Найдите стороны параллелограмма, если одна из диагоналей является его высотой и имеет длину  $h$ , а длина другой диагонали равна  $d$ .
23. Точка касания вписанной окружности делит катет прямоугольного треугольника на отрезки 6 см и 10 см, считая от вершины прямого угла. Найдите периметр треугольника.

24. Диагональ  $BD$  трапеции  $ABCD$  равна  $m$ , а боковая сторона  $AD$  равна  $n$ . Найдите основание  $CD$ , если известно, что основание, диагональ и боковая сторона трапеции, выходящие из вершины  $C$ , равны между собой.
25. Из одной точки проведены к данной прямой перпендикуляр и две наклонные. Найдите длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 см и 50 см, а их проекции на данную прямую относятся как 3 : 10.

## 5 Решение прямоугольных треугольников

26. В прямоугольном треугольнике:  $ABC \angle C = 90^\circ$ ;  $AC = 24$ ;  $BC = 10$  провели высоту  $CD$ . Найдите синусы, косинусы и тангенсы углов  $BAC$  и  $ACD$ .
27. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна  $a$ , угол при вершине равен  $\alpha$ . Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.
28. Окружность, вписанная в трапецию, делит ее боковую сторону на отрезки  $a$  и  $b$ . Найдите высоту трапеции.
29. Катеты прямоугольного треугольника имеют длины  $a$  и  $b$ . Найдите длину высоты, опущенной на гипотенузу.
30. В равнобокой трапеции длины оснований равны  $a$  и  $b$ , острый угол равен  $\alpha$ . Найдите: а) высоту трапеции; б) боковую сторону; в) диагонали.
31. Из точки, лежащей внутри угла  $30^\circ$ , на стороны угла опущены перпендикуляры, длины которых равны  $a$  и  $b$ . Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.
32. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если его высота, проведенная к основанию, равна 40 см, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 48 см.

### 5.1 Разное

33. В треугольнике  $ABC$   $AB = 30$ ,  $AC = 40$ . В каких пределах лежит медиана  $AM$ ?
34. Диагонали четырехугольника равны. Докажите, что его средние линии перпендикулярны.
35. Найдите стороны описанного четырехугольника, если три из них пропорциональны числам 5, 4 и 3, а его периметр равен 5 метров 4 сантиметра.
36. В треугольнике медиана равна высоте, проведенной к другой его стороне. Найдите угол между этими высотой и медианой.
37. Длина стороны равностороннего треугольника равна  $a$ . Найдите высоту, радиусы вписанной и описанной окружностей.
38. **Касающиеся окружности.** Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  и радиусами  $R_1$  и  $R_2$  касаются внешним образом. Найдите длину отрезка  $AB$  их общей внешней касательной.

39. **Касающиеся окружности.** Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом. Через точку  $C$  касания данных окружностей проведена их общая касательная, которая пересекла отрезок  $AB$  их общей внешней касательной в точке  $M$ . Найдите  $\angle ACB, \angle O_1MO_2$ .
40. **Вневписанные окружности.** В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $120^\circ$ .  $AL_1, BL_2$  и  $CL_3$  — биссектрисы. Докажите, что угол  $L_2L_1L_3$  равен  $90^\circ$ .
41. **Средняя линия треугольника.** Из вершины  $A$  треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $AQ$  на биссектрисы внешних углов  $B$  и  $C$ . Найдите отрезок  $PQ$ , если периметр треугольника  $ABC$  равен 10.
42. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с катетами  $BC = a$  и  $AC = b$  во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от точки  $C$  до центра квадрата.
43. **Теорема о пропорциональных отрезках.** Точка  $K$  — середина медианы  $AM$  треугольника  $ABC$ . В каком отношении прямая  $BK$  делит сторону  $AC$ ?
44. **Свойство биссектрисы. Теорема о пропорциональных отрезках.** В треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AD$  делит сторону  $BC$  в отношении  $BD : DC = 2 : 1$ . В каком отношении медиана  $CM$  делит эту биссектрису?
45. Точки  $E, F, G$  и  $H$  лежат на сторонах  $AB, BC, CD, DA$  квадрата  $ABCD$  соответственно, так что  $EG \perp FH$ . Докажите, что  $EG = FH$ .
46. **Вспомогательная окружность.** Дан равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной  $a$ . Точка  $D$  находится от точки  $A$  на расстоянии  $a$ . Какие значения может принимать величина угла  $BDC$ ?
47. Две окружности пересекаются в точках  $M$  и  $K$ . Через них проведены прямые  $AB$  и  $CD$  соответственно, пересекающие первую окружность в точках  $A$  и  $C$ , а вторую — в точках  $B$  и  $D$ . Докажите, что  $(AC) \parallel (BD)$ .
48. Найдите угол  $CBD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , если  $\angle CAD = 50^\circ; \angle ADC = 60^\circ; \angle ABD = 70^\circ$ .
49. Биссектрисы  $BE$  и  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите угол  $BAC$ , если известно, что точки  $A, M, E$  и  $O$  лежат на одной окружности.
50. Тупой угол вписан в окружность и опирается на ее хорду, равную радиусу. Найдите величину этого угла.

## 5.2 Задачи на построение. ГМТ.

51. Объясните, как по заданным отрезкам длины  $x, y, z, m, n$  построить отрезки:  
 а)  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ; б)  $\sqrt{x^2 - y^2}$ ; в)  $\sqrt{xy}$ ; г)  $\frac{xy}{z}$ , д)  $\frac{xym}{zn}$ .
52. Объясните, как построить отрезок длины  $\sqrt{n}$ , где  $n$  — произвольное натуральное число, если задан отрезок длины 1. Приведите численные примеры.

53. **Метод ГМТ** или **Базовый треугольник**. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной к гипотенузе.
54. Объясните построение треугольника по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
55. Объясните построение треугольника по трем медианам.
56. Объясните построение треугольника по периметру и двум углам.
57. **ГМТ**. Объяснить как построить множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, если угол — а) острый; б) тупой.
58. **Метод ГМТ**. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной к данной стороне.
59. Объясните построение касательной к данной окружности из данной точки.
60. Объясните построение общей внутренней касательной к двум окружностям. Укажите количество решений задачи в зависимости от взаимного расположения окружностей.
61. Объясните построение общей внешней касательной к двум окружностям. Укажите количество решений задачи в зависимости от взаимного расположения окружностей.
62. Объясните построение трапеции по ее основаниям и диагоналям.
63. Объясните построение трапеции по ее основаниям и боковым сторонам.
64. Объясните построение равнобокой трапеции по диагонали и радиусу вписанной окружности.
65. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключённый внутри этого угла, делился бы данной точкой пополам.

## 6 Метод координат

66. Составьте уравнение окружности: а) с центром в точке  $M$  и радиусом  $MP$ , где  $M(1; 7); P(2; 3)$ ; б) описанной около треугольника  $KLN$ , где  $K(5; 0); L(3; 4); N(0; 5)$ .
67. Найдите координаты центров и радиусы окружностей: а)  $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 7$ ; б)  $2x^2 - x + 2y^2 + 4y - 1 = 0$ .
68. Даны прямые:  $a : y = 3x + 7$ ;  $b : 2x + y + 1 = 0$ ;  $c : 5x - y + 3 = 0$ ;  $d : y = 3x - 5$ ;  $l : 3y + x = 1$ . Обоснуйте взаимное расположение прямых.
69. Найдите уравнение ГМТ, равноудаленных от точек  $A(3; -7)$  и  $B(5; 11)$ .
70. Составьте уравнение ГМТ таких, что сумма квадратов их расстояний до  $A(3; 5)$  и  $B(7; -11)$  равна 234.
71.  $A(-3; 0)$  и  $B(5; 0)$ . Составьте уравнение ГМТ  $M$  таких, что  $MA^2 - MB^2 = 16$ .
72. Составьте уравнение касательной к окружности  $x^2 + y^2 = 25$  в точке  $N(3; 4)$ .