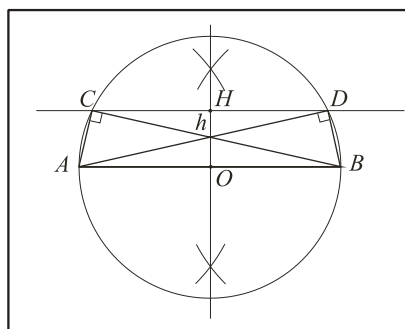




А Р Х И М Е Δ



Выпуск 23

Экзамен по геометрии
в 9 классе



2022



Редколлегия:

***Е. Шершнев
А. Смирнов
А. Шевкин
А. Обрубов
Н. Волкова
П. Чулков
Т. Струков***

АРХИМЕД
Серия: заочная школа
Вып.23

Содержание:

Введение	1
Часть 1. Основные формулы	2
Часть 2. Векторы и координаты	4
Часть 3. Различные методы	11
Часть 4. Программа экзамена	22
Часть 5. Билеты	24

В. Ховрина, Д. Прокопенко
Экзамен по геометрии в 9 классе

Выпуск подготовили
Н. Иванова, Т. Струков

Архимед. Заочная школа. Вып. 23: Экзамен по геометрии в 9 классе. Редакция 3.

В выпуске представлены материалы для подготовки к экзамену по геометрии за курс основной школы. Пособие предназначено для учащихся средних и старших классов и может быть использовано при подготовке к экзаменам, итоговым контрольным работам, олимпиадам и т.д.

Редакция приглашает авторов к сотрудничеству.

Адрес для корреспонденции: 121019, Москва, Гоголевский бульвар 27-13 или info@archimedes.org

© 2022, АНО Институт логики
© 2022, Редакция «Архимед»

Изд. Лицензия ЛР № 066121 от 22.09.1998. Подп. в печать 08.09.22.
Объем 1,5 п.л. Формат 60x90/16. Бумага офсетная. Тираж 200 экз.
Отпечатано в типографии «Евсти».

Введение

Настоящее пособие предназначено для учащихся заочной школы при ФМШ № 2007. Пособие предназначено для подготовки к экзамену по геометрии в 9 классе, содержит теоретические вопросы и задачи и предназначено для самостоятельной работы учащихся.

Порядок работы с пособием:

- 1) подготовить ответы на теоретические вопросы билетов по учебнику;
- 2) решить предложенные задачи;
- 3) в случае необходимости, советуем обращаться к литературе из предлагаемого списка.

Желаем успехов!

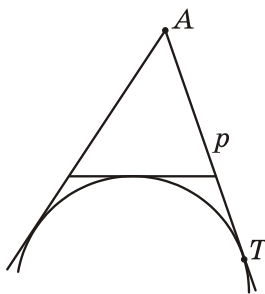
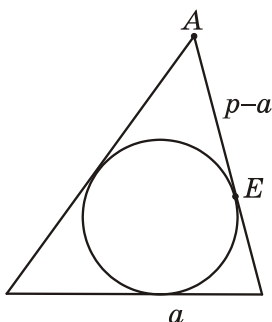
Литература

1. Погорелов А.В. Геометрия: Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2019.
2. Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник – М.: МЦНМО 2019.
3. Гордин Р.К. Планиметрия. 7–9 классы – М.: МЦНМО, 2004.
4. Гордин Р.К. Теоремы и задачи школьной геометрии. Базовый и профильный уровни. – М.: МЦНМО, 2019.
5. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Т.1. Планиметрия, преобразования плоскости. – М.: МЦНМО, 2018.

Часть 1. Основные формулы

В треугольнике

- Угол между биссектрисами углов B и C : $\varphi = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$.
- Угол между внешними биссектрисами углов B и C :
 $\varphi = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$.
- Угол между высотами, проведенными из углов B и C :
 $\varphi = 180^\circ - \angle A$ или $\varphi = \angle A$.
- Отрезки касательных к вписанной и невписанной окружностям: 1) $AE = p - a$; 2) $AT = p$.



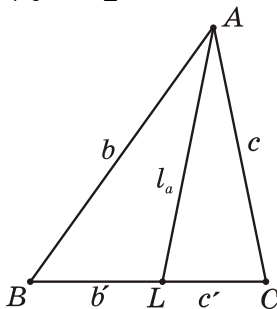
- Радиусы вписанной и невписанной окружности:

$$r = (p - a) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}; R_a = p \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

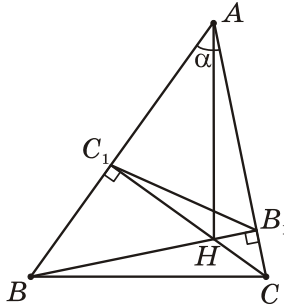
- Формула медианы: $a^2 + 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2)$.

- Формулы биссектрисы:

$$1) l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}; \quad 2) l_a^2 = bc - b'c'.$$



- Подобие: 1) $\triangle ABC \sim \triangle AC_1B_1$, $k = |\cos \angle A|$;
2) $B_1C_1 = BC |\cos \angle A|$; $AH = 2R |\cos \angle A|$.



- Формулы площади треугольника:

$$1) S = \frac{1}{2} ah_a; \quad 2) S = \frac{1}{2} bc \sin A; \quad 3) S = pr; \quad 4) S = \frac{abc}{4R};$$

$$5) \text{ формула Герона } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

В четырехугольнике

- Формула параллелограмма: $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$, e и f — длины диагоналей, a и b — длины сторон.
- Формула площади произвольного четырехугольника:
 $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей, φ — угол между диагоналями;

В декартовой системе координат

- Формула расстояния h от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Часть 2. Векторы и координаты**Вычисления, связанные с треугольником.**

1. Дано: $A(-4; 3)$, $B(-4; 5)$, $C(5; -3)$.
 - 1) Определите вид треугольника ABC .
 - 2) Найдите косинус наибольшего угла треугольника.
 - 3) Составьте уравнения прямых, содержащих стороны треугольника.
 - 4) Найдите координаты точки пересечения медиан.
 - 5) Составьте уравнение прямой, содержащей медиану, проведенную из вершины A .
 - 6) Составьте уравнение прямой, содержащей высоту, проведенную из вершины A .
 - 7) Составьте уравнение прямой, содержащей биссектрису угла A .
 - 8) Найдите площадь треугольника ABC .
 - 9) Составьте уравнение окружности ω , описанной около треугольника ABC .
 - 10) Вычислите координаты точки пересечения окружности ω и прямой, проходящей через центр окружности и начало координат.

Координаты на плоскости

2. **Формула середины отрезка.** Три вершины параллелограмма имеют координаты $(1; 1)$, $(7; 3)$, $(3; 4)$. Найдите четвертую вершину, если известно, что она имеет отрицательную абсциссу.
3. **Формула середины отрезка. Уравнение прямой.** Составьте уравнение прямой, отрезок которой, заключенный между прямыми $y = 0$ и $y = x$, делится в точке $M(5; 1)$ пополам.
4. **Формула середины отрезка.** Пусть M и N — середины двух параллельных хорд параболы $y = x^2$. Докажите, что прямая MN параллельна оси OY .
5. **Симметрия.** Дана точка $M(-1; 3)$. Найдите координаты точки, симметричной точке M относительно: 1) оси Ox ; 2) оси Oy ; 3) начала координат; 4) точки $K(3; 1)$; 5) биссектрисы I и III координатных углов; 6) биссектрисы II и IV координатных углов.

6. **Прямая (коллинеарность векторов).** Пусть точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ лежат на одной прямой, не параллельной оси Oy . 1) Докажите, что $\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$. 2) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению пункта 1.
7. **Прямая (коллинеарность векторов).** При каком значении t точки: 1) $A(3; 8)$, $B(9; t)$, $C(-5; 0)$; 2) $M(t; -4)$, $N(2; -t)$, $K(8; 17)$ лежат на одной прямой?
8. **Уравнение прямой.** Напишите уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку: 1) $5x + 3y - 1 = 0$, $O(0; 0)$; 2) $y = 6x - 3$, $K(7; -11)$.
9. **Уравнение прямой.** Напишите уравнение прямой, перпендикулярной данной прямой и проходящей через данную точку: 1) $3x - 4y + 5 = 0$, $K(-7; 8)$; 2) $5x + 3y - 1 = 0$, $M(1; 1)$.
10. **Формула расстояния между точками.** Найдите углы треугольника с вершинами $A(-2; -6)$, $B(4; 2)$, $C(-4; 8)$.
11. **Расстояние от точки до прямой.** Найдите расстояние от начала координат до прямой:
1) $3x + 4y - 60 = 0$; 2) $3x - 4y + 36 = 0$.
12. **Расстояние между прямыми.** Найдите расстояние между параллельными прямыми 1) $y = -3x + 5$ и $y = -3x - 4$; 2) $7x - 24y - 168 = 0$ и $7x - 24y - 336 = 0$.
13. **Расстояние от точки до прямой. Уравнение окружности.** Составьте уравнение окружности с центром в точке $M(3; 2)$, касающейся прямой $y = 2x + 6$.
14. **Расстояние от точки до окружности.** Найдите расстояние от точки до окружности:
1) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 11$, $M(3; -1)$; 2) $x^2 + 6x + y^2 - 10y = 2$, $O(0; 0)$.
15. **Формула расстояния между точками.** 1) $|x - 1| + |x + 5|$; 2) $\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5}$. Какой геометрический смысл выражений в пунктах 1 и 2? Найдите значения переменных, при которых эти выражения принимают наименьшее значение.

16. **Уравнение окружности.** Найдите радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением:

1) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$; 2) $x^2 + y^2 - 2(x - 3y) - 15 = 0$;

3) $x^2 + y^2 = x + y + 12$.

17. **Окружность и прямая.** Найдите все точки окружности $x^2 + y^2 = 25$, сумма расстояний от которых до точек $A(7; 0)$ и $B(0; 7)$ — наименьшая.

18. **Уравнение окружности.** Докажите с помощью метода координат, что для любой точки окружности описанной около квадрата, сумма квадратов расстояний до четырех вершин квадрата есть величина постоянная.

19. **Уравнение окружности.** На окружности $x^2 + y^2 = 25$ найдите точку: 1) ближайшую к точке $M(6; 8)$; 2) наиболее удаленную от точки $B(8; 6)$.

20. **Касание окружностей.** Составьте уравнение окружности радиуса 1) 5; 2) 10, касающейся окружности $x^2 + y^2 - 10y = 0$ в точке $A(3; 1)$.

21. **Уравнение фигуры.** Какое множество точек задает уравнение:

1) $x^4 + x^2y^2 = 36x^2$;

2) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 16 = 0$;

3) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 26x^2 - 26y^2 + 25 = 0$;

4) $(x - 2y)^2 + (y + 2x)^2 = 5$.

22. **Уравнение фигуры.** Составьте уравнение фигуры, состоящей из точек:

1) находящихся на расстоянии $\sqrt{2}$ от оси ординат;

2) равноудаленных от прямых $x = 5$ и $x = -2$;

3) разность квадратов расстояний от которых до точек $A(1; 0)$ и $B(-1; 2)$ равна 1;

4) сумма квадратов расстояний от которых до точек $A(-1; 0)$ и $B(1; 0)$ равна 12.

23. **Применение координатного метода.** Докажите, что суммы квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до противоположных вершин прямоугольника равны между собой.

24. ГМТ. С помощью метода координат найдите геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.
25. ГМТ. Даны точки A , B и положительное число k . Найдите геометрическое место точек M , для которых $AM = k \cdot BM$.
26. ГМТ. Даны точки A , B и положительное число d . Найдите геометрическое место точек M , для которых $AM^2 + BM^2 = d$.

Векторы (разное)

27. Векторы (расстояние между точками). Даны точки $A(2; 4)$, $B(-8; 4)$ и $C(-8; 1)$. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.
28. В прямоугольной трапеции $ABCD: AB \parallel CD$, $\angle A$ — острый, $|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Найдите углы трапеции.
29. Найдите координаты всех векторов единичной длины, коллинеарных прямой $3x - 2y + 1 = 0$.
30. Дано: $\vec{a}(3; -2)$ и $\vec{b}(1; 2)$. Найдите координаты вектора $\frac{\vec{a} - 3\vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$.
31. Неравенство треугольника. Дано: $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 15$.
В каких пределах может изменяться $|\vec{b}|$?
32. ГМТ. Дан вектор $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$. Где расположены все такие точки C , что:
1) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$; 2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC}|$; 3) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BC}|$?

Скалярное произведение. Модуль вектора.

33. Перпендикулярные векторы. Докажите, что вектор $\vec{n}(a; b)$ перпендикулярен прямой $ax + by = c$.
34. Скалярное произведение (Середина отрезка. Расстояние между точками) Даны точки $A(-2; 0)$, $B(1; 6)$, $C(5; 4)$ и $D(2; -2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

35. **Скалярное произведение.** Дано: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$.

Вычислите $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

36. **Угол между векторами.** Найдите угол между прямыми
1) $3x + 4y - 60 = 0$, $3x + 4y + 36 = 0$; 2) $3x + 4y - 60 = 0$,
 $4x - 3y + 36 = 0$. 3) Найдите тангенс угла между прямыми
 $3x + 4y - 60 = 0$ и $3x - 4y + 36 = 0$.

37. **Перпендикулярные векторы.** Даны векторы $\vec{AB} = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ и
 $\vec{AC} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, где \vec{e}_1 и \vec{e}_2 — единичные векторы координатных осей. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

38. **Перпендикулярные векторы.** Какой угол образуют единичные векторы \vec{a} и \vec{b} , если известно, что векторы $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $2\vec{a} + 0,4\vec{b}$ перпендикулярны?

39. **Перпендикулярные векторы.** Даны векторы $\vec{a}(1; 4)$ и $\vec{b}(-3; 2)$. Найдите значение λ , при котором вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ перпендикулярен вектору \vec{b} .

40. Упростите выражение: $(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b} - \vec{a})$, где \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} — единичные векторы и угол между векторами \vec{a} и \vec{c} равен 60° .

41. **Единичный вектор.** Найдите координаты единичного вектора, 1) коллинеарного вектору $\vec{a}(3; 4)$; 2) сонаправленного с вектором $\vec{a}(-12; 5)$.

42. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. В каких пределах может изменяться $|\vec{c}|$, если $\vec{c} = 7\vec{a} - 8\vec{b}$?

Коллинеарные векторы.

43. **Коллинеарные векторы.** При каком значении x векторы $\vec{a}(3; 8)$ и $\vec{b}(7; x)$ коллинеарны?

44. **Коллинеарность векторов (уравнение прямой).** Докажите, что точки $A(-1; -2)$, $B(2; -1)$ и $C(8; 1)$ лежат на одной прямой.

45. **Коллинеарные векторы.** Даны точки $A(-1; 7)$ и $B(5; -1)$, Найдите координаты всех единичных векторов, коллинеарных вектору \overrightarrow{AB} .
46. **Коллинеарные векторы.** Векторы \vec{m} и \vec{n} неколлинеарны. При каких значениях x коллинеарны векторы \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = x\vec{m} - 7\vec{n}$ и $\vec{b} = 8\vec{m} + 3\vec{n}$?
47. **Коллинеарные векторы.** Найдите вектор \vec{b} , коллинеарный вектору $\vec{a}(3; -4)$, если $|\vec{b}| = 15$.

Разложение векторов

48. **Формула медианы.** Пусть точка M — середина отрезка AB , O — произвольная точка плоскости. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

49. **Точка пересечения медиан.** Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — произвольная точка плоскости. Докажите векторное равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

50. **«Средняя» линия четырехугольника.** Точки M и N являются серединами отрезков AB и CD соответственно. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

51. **Точка, делящая отрезок в данном отношении.** Точка M лежит на отрезке AB и $AM : MB = m : n$. O — произвольная точка плоскости. Докажите, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB}.$$

52. **Разложение векторов через координаты.** Даны векторы $\vec{a}(3; 5)$, $\vec{b}(7; -3)$ и $\vec{c}(2; 1)$. Разложите каждый из данных векторов по двум другим.

53. **Разложение векторов через координаты.** Даны точки: $M(3; 5)$, $K(10; -4)$, $N(-1; 2)$, $P(-2; -3)$. Разложите вектор \overrightarrow{PM} по векторам \overrightarrow{NP} и \overrightarrow{KM} .

54. **Векторное уравнение прямой.** 1) Пусть $\overrightarrow{MC} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$, где точка M не лежит на прямой AB . Точка C лежит на

прямой AB . Докажите, что $x + y = 1$. 2) Пусть $\overrightarrow{MC} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$ и $x + y = 1$. Докажите, что точка C лежит на прямой AB .

55. **Точка, делящая отрезок в данном отношении.** В треугольнике ABC проведена биссектриса угла A , пересекающая сторону BC в точке A_1 ; $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Докажите, что:

1) векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ коллинеарны;

2) $\overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$.

56. **Точка, делящая отрезок в данном отношении.** Точка M лежит на стороне AB треугольника ABC и $AM : MB = 3 : 4$.

1) Выразите вектор \overrightarrow{CM} через векторы \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} . 2) Найдите длину отрезка CM , если $\angle C = 90^\circ$, $CA = 2$ и $CB = 1$.

Часть 3. Различные методы

- 1. Элементы треугольника.** Пусть в треугольнике ABC известны стороны 1) $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$; 2) $AB = c$, $BC = AC = a$.
Обозначения: r , R , I , O — радиусы и центры вписанной и описанной окружностей; R_a — радиус внеписанной окружности, касающейся стороны a . AH_1 , BH_2 — высоты, H — точка пересечения высот. M — точка пересечения медиан треугольника, K — середина BC .
 - 1) Определите вид треугольника. Найдите косинусы его углов.
 - 2) Найдите отрезки касательных, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника.
 - 3) Найдите h_a , l_a , m_a .
 - 4) Найдите R , r , R_a .
 - 5) Найдите площадь вписанного круга.
 - 6) Найдите OI^2 .
 - 7) Найдите длину OK .
 - 8) Найдите AH , AI .
 - 9) Найдите площадь треугольника CH_1H_2 .
- 2. Высота.** Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины наибольшего угла.
- 3. Биссектриса.** В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $AC = b$, $\angle BAC = 120^\circ$. Найдите биссектрису AM .
- 4. Биссектриса.** В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при основании.
- 5. Теорема Пифагора.** В окружности радиуса 13 см проведены две параллельные хорды AB и CD . Известно, что их длины 24 см и 10 см. 1) Докажите, что равны дуги, заключённые между этими хордами. 2) Найдите расстояние между этими хордами. 3) Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$, где O — центр окружности.

6. **Теорема Пифагора.** Две окружности ω_1 и ω_2 радиусов R_1 и R_2 касаются внешним образом. 1) Их общая внешняя касательная (прямая a) имеет с ними общие точки — M и N . Найти MN . 2) Окружность ω_3 касается ω_1 , ω_2 внешним образом и прямой a . Найдите радиус R_3 этой окружности.
7. **Теорема Пифагора.** Найдите расстояние от центра окружности радиуса 9 см до точки пересечения двух взаимно перпендикулярных хорд, длины которых равны 16 см и 14 см.
8. **Теорема Фалеса.** В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что прямые BF и DE делят диагональ AC на три равные части.
9. **Теорема Фалеса.** Найдите косинус угла A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), ортоцентр которого делит пополам высоту, проведенную к основанию.
10. **Прямоугольный треугольник.** В прямоугольном треугольнике высота и медиана, проведенные к гипотенузе, равны 24 см и 25 см соответственно. Найдите периметр треугольника.
11. **Свойство биссектрисы.** В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису CD ?
12. **Теорема синусов.** В треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H . Докажите, что равны радиусы описанных окружностей треугольников ABC и BCH .
13. **Теорема синусов. Неравенства.** В остроугольном треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Докажите, что 1) $a^2 + b^2 > c^2$; 2) $a \sin \alpha$, $b \sin \beta$, $c \sin \gamma$; 3) $a \cos \alpha$, $b \cos \beta$, $c \cos \gamma$ являются длинами сторон некоторого треугольника.
14. **Теорема синусов (или угол между высотой и радиусом).** Около треугольника ABC , в котором $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, AH — высота, описана окружность с центром O . Биссектриса угла A пересекает эту окружность в точке K . 1) Докажите, что $\angle OAB = \angle CAH$. 2) Найдите угол OAH . 3) Найдите AK .

15. **Теорема синусов.** Пусть AH_1 , BH_2 и CH_3 — высоты треугольника ABC . A_1 и A_2 — проекции точки H_1 на прямые AB и AC . Аналогично определим точки B_1 и B_2 , C_1 и C_2 . Докажите, что длины отрезков A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 равны.
16. **Теорема косинусов.** Дан треугольник ABC . Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K . Прямая, проходящая через точку B параллельно AC , пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M . Найдите KM .
17. **Формула медианы (или разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций).** Доказать, что для произвольной точки X и прямоугольника $ABCD$ верно равенство $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$.
18. **Площадь треугольника.** В треугольнике по двум сторонам и площади определить третью сторону: $a = 17$, $b = 28$, $S = 210$.
19. **Площадь треугольника.** Найдите высоты треугольника, если его площадь равна S , а углы равны α , β и γ .
20. **Площадь.** Четырехугольник $ABCD$ площади S разделен на три части отрезками, которые не пересекаются и делят стороны BC и AD на три равные части. Докажите, что площадь средней части равна $\frac{S}{3}$.
21. **Площадь.** В параллелограмме $ABCD$: $AB = 15$ см; $AC = 28$ см; $BD = 26$ см; O — точка пересечения диагоналей. 1) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$. 2) На стороне AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 1 : 3$; на стороне CD отмечена точка M так, что $CM : MD = 3 : 5$. Найдите площадь четырехугольника $AKCM$.
22. **Площадь.** Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на четыре треугольника (последовательно пронумерованных), площади которых равны S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

23. **Трапеция. Площадь.** В трапеции $ABCD$ известны основания: $AD = a$, $BC = b$ и площадь S треугольника BOC (O — точка пересечения диагоналей). 1) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны. 2) Найдите площади всех треугольников, на которые диагонали разбивают трапецию.
24. **Площадь.** Стороны треугольника ABC разделены точками M, N и K так, что $AM : MB = BN : NC = CK : KA = 2 : 1$. Известно, что площадь треугольника MNK равна 1. Вычислите площадь треугольника ABC .
25. **Площадь четырехугольника. Неравенство.** Стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Докажите, что его площадь не превосходит 1) $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$; 2) $\frac{ac+bd}{2}$.
26. **Трапеция. Площадь.** Дана трапеция с боковыми сторонами 13 см и 20 см и основаниями 6 см и 27 см. Найдите: 1) площадь трапеции; 2) длину отрезка, параллельного основаниям, и делящего трапецию на две равновеликие трапеции.
27. **Трапеция.** Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите высоту трапеции.
28. **Трапеция.** Диагональ BD трапеции $ABCD$ равна m , а боковая сторона AD равна n . Найдите основание CD , если известно, что основание, диагональ и боковая сторона трапеции, выходящие из вершины C , равны между собой.
29. **Трапеция.** В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол ADB в два раза меньше угла ACB . Известно, что $BC = AC = 5$ и $AD = 6$. Найдите площадь трапеции.
30. **Трапеция. Площадь.** Дана трапеция $ABCD$, диагонали AC и BD которой пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K под углом 30° . Известно, что углы BAC и CDB равны, а площадь трапеции равна S . 1) Найдите угол BDC ; 2) найдите площадь треугольника AKD .

31. **Трапеция.** В некоторый угол вписана окружность радиуса 5. Хорда, соединяющая точки касания, равна 8. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найдите стороны полученной трапеции.
32. **Формула радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника.** Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности?
33. **Подобие (теорема синусов).** Найдите стороны треугольника ABC , если известен его периметр P и два угла α и β .
34. **Свойство биссектрисы. Теорема о пропорциональных отрезках.** В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : DC = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?
35. **Подобие в прямоугольном треугольнике.** В треугольнике ABC угол C — прямой. 1) На катетах построены равнобедренные треугольники площадью S_1 и S_2 . Найдите площадь равнобедренного треугольника, построенного на гипотенузе. 2) CH — высота. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC , ACH и BCH , равны соответственно r , r_1 и r_2 . Выразите r через r_1 и r_2 .
36. **Вспомогательные подобные треугольники.** На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причем $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{3}{2}$. Найдите MN , если $BC = a$ и $AD = b$.
37. **Вспомогательные подобные треугольники.** Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции, если основания трапеции равны a и b .
38. **Вспомогательные подобные треугольники.** В трапеции $ABCD$ основание $AB = a$, основание $CD = b$ ($a < b$). Окружность, проходящая через вершины A , B и C , касается стороны AD . Найдите диагональ AC .
39. **Подобие. Свойство медиан.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны 12 и 18 и пересекаются в точке O . Найдите стороны четырёхугольника с вершинами в точках пересечения медиан треугольников AOB , COB , COD и AOD .

40. **Вписанный четырехугольник. Подобие.** В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . 1) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1 . Укажите коэффициент подобия. 2) Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.
41. **Вписанный четырехугольник. Признак и свойство.** На сторонах BC , AC и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в одной точке.
42. **Подобие в окружности.** Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Точка O_1 — центр ω_1 , O_2 — центр ω_2 . Точка $C \in \omega_1$, $D \in \omega_2$, так что B лежит на отрезке CD . 1) Доказать, что треугольники CAD и O_1AO_2 подобны; 2) $O_1A = 5$, $O_2A = 12$, $AC = 9$, $\angle CAD = 90^\circ$. Найдите CD .
43. **Подобие в окружности.** Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найдите AC .
44. **Подобие в окружности.** В окружности с центром O проведены хорды AB и CD , пересекающиеся в точке M , причём $AM = 4$, $MB = 1$, $CM = 2$. Найдите угол OMC .
45. **Квадрат касательной и секущие к окружности.** В квадрат $ABCD$ со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E . Найдите хорду, соединяющую точки, в которых окружность пересекается с прямой AE .
46. **Квадрат касательной и секущие к окружности.** Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведённой из точки C к окружности, равна 3, $AB = 1$. Найдите сторону BC .
47. **Квадрат касательной и секущие к окружности.** В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а медиана, проведённая к этой стороне, равна 3. Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку A и касается BC , причём одна касается BC в точке B , а вторая — в точке C .

48. **Секущие к окружности.** Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A , причём $AD = \frac{2}{3}AB$. Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 1$.
49. **Вспомогательная окружность.** На стороне AB квадрата $ABCD$ построен внешним образом прямоугольный треугольник ABP , $\angle P = 90^\circ$, $AP = 5$, $BP = 6$. 1) Биссектриса угла APB пересекает сторону CD в точке Q . Найдите отношение $CQ : QD$. 2) Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Найдите PO . 3) Найдите PQ .
50. **Вспомогательная окружность.** На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной C , если $AB = c$ и $\angle C = 120^\circ$.
51. **Вспомогательная окружность.** 1) Треугольник ABC — равносторонний со стороной a . На расстоянии a от вершины A взята точка D . Найдите величину угла BDC . 2) BE и CF — биссектрисы треугольника ABC , в котором $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите $\angle BEF$.
52. **Вспомогательная окружность.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A , B и C соответственно равны 60° , 150° и 45° . Кроме того, $AB = BC$. Докажите, что треугольник ABD — равносторонний.
53. **Биссектрисы пересекаются в одной точке. Вписанный четырехугольник.** В треугольнике ABC : $\angle A = \alpha$, биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке Q . 1) Найдите $\angle BQC$. 2) Докажите, что AQ является биссектрисой угла A .
54. **Вневписанные окружности.** 1) Докажите, что отрезок, соединяющий центры двух вневписанных окружностей треугольника проходит через одну из его вершин. 2) Стороны треугольника равны $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений сторон AB и AC . Найдите расстояние от вершины A до точки касания окружности с прямой AB .

55. **Вписанные углы. Центры вписанной и невписанной окружностей.** Докажите, что середина дуги BC (не содержащей точку A) описанной окружности треугольника ABC равноудалена от точек B , C , центра вписанной окружности и центра невписанной окружности, касающейся стороны BC .
56. **Биссектрисы пересекаются в одной точке. Невписанные окружности.** В треугольнике ABC угол A равен 120° . L_1 , L_2 и L_3 — основания биссектрис AL_1 , BL_2 и CL_3 . Докажите, что угол $L_2L_1L_3$ равен 90° .
57. **Медианы. Неравенство треугольника. Площадь** 1) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник. 2) Две медианы треугольника имеют длины 8 см и 10 см. Найдите границы изменения третьей медианы треугольника. 3) Пусть третья медиана равна 6 см. Найдите площадь треугольника ABC .
58. **Вписанный четырехугольник. Вписанный и центральный угол.** Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и CA соответственно в точках K , L и M , $\angle BAC = \alpha$. 1) Найдите $\angle KLM$. 2) Биссектриса угла A пересекает вписанную окружность в точках P и Q . Найдите $\angle KPM$ и $\angle QM$.
59. **Углы между биссектрисами, высотами треугольника. Вписанный четырехугольник.** Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$. а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC . б) Найдите угол OIH , если $\angle ABC = 55^\circ$.
60. **Теорема Чевы.** На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отметили точки F , E и G соответственно. Отрезки AE , BG и CF пересекаются в точке T . Через вершину A провели прямую a , параллельно стороне BC . Прямые EF и EG пересекают прямую a в точках P и Q . Докажите, что $AP = AQ$.

61. **Теорема Менелая.** На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ расположены точки N и M соответственно, причём $AN : NB = 3 : 2$, $BM : MC = 2 : 5$. Прямые AM и DN пересекаются в точке O . Найдите отношения $OM : OA$ и $ON : OD$.
62. **Теорема Менелая.** В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении прямая AD делит высоту BE треугольника ABC , считая от вершины B ?
63. **Теорема Чевы. Теорема Менелая.** 1) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон и вписанной окружности, пересекаются в одной точке. 2) Точка M — середина медианы AD треугольника ABC . В каком отношении прямая BM делит сторону AC ?

Движения.

64. **Поворот.** Пусть O — центр правильного многоугольника $A_1A_2A_3\dots A_n$. Докажите, что $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{0}$.
65. **Осевая симметрия. Задача Герона.** 1) На данной прямой a найти точку M , сумма расстояний от которой до двух данных точек A и B , лежащих с одной стороны от a , наименьшая. 2) Что можно сказать про углы, которые образуют полученные отрезки с прямой a ?
66. **Осевая симметрия.** Внутри острого угла дана точка A . 1) Построить треугольник ABC наименьшего периметра, вершины B и C которого принадлежат сторонам угла. 2) Что можно сказать, про углы, которые образуют полученные отрезки со сторонами угла в точках B и C ?
67. **Параллельный перенос.** В каком месте надо построить мост MN через реку, разделяющую две данные деревни A и B , чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был кратчайшим? (Берега считаются параллельными прямыми, мост предполагается перпендикулярным реке.)
68. **Параллельный перенос.** Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M . Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC , стороны которого равны AM , BM , CM , DM .

69. **Центральная симметрия.** Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M . Через точки A , B , C и D проведены прямые, параллельные прямым MC , MD , MA и MB соответственно. Докажите, что проведенные прямые пересекаются в одной точке.
70. **Центральная симметрия.** На сторонах AC и BC прямоугольного треугольника ABC взяты соответственно точки M и N , так что $\angle MON = 90^\circ$, где O — середина гипотенузы AB . Докажите, что $AM^2 + BN^2 = MN^2$.
71. **Поворот.** На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

Задачи на построение и ГМТ.

72. **Треугольник.** Постройте треугольник по
- 1) по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне;
 - 2) стороне, проведенной к ней медиане и противолежащему углу;
 - 3) стороне и медианам, проведенным к двум другим сторонам;
 - 4) по трем медианам;
 - 5) двум сторонам и высоте, проведенной к одной из них;
 - 6) двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне;
 - 7) стороне и проведенным к ней медиане и высоте;
 - 8) периметру и двум углам.
73. **Прямоугольный треугольник.** Постройте прямоугольный треугольник по
- 1) сумме катетов и острому углу;
 - 2) разности катетов и острому углу;
 - 3) сумме катета и гипотенузы и острому углу.
74. **Трапеция.** Постройте трапецию по
- 1) четырем сторонам;
 - 2) боковым сторонам, меньшему основанию и сумме углов, прилежащих к большему основанию;
 - 3) боковым сторонам, основанию и высоте;
 - 4) боковым сторонам, высоте и средней линии;
 - 5) одному из углов, длины двух диагоналей и средней линии.

75. **Параллелограмм.** Постройте параллелограмм по

- 1) двум сторонам и высоте;
- 2) острому углу и двум высотам;
- 3) двум высотам и диагонали;
- 4) двум диагоналям и высоте.

76. **Особенные отрезки.** Даны отрезки длины a , b , c , d и e .

Постройте отрезок длины x , если 1) $x = \frac{ab}{c}$; 2) $x = \frac{abc}{de}$;

3) $x = \frac{a^2}{b}$; 4) $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$; 5) $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; 6) $x = \sqrt{ab}$

(среднее геометрическое отрезков a и b); 7) $x = \frac{2ab}{a+b}$

(среднее гармоническое отрезков a и b).

77. Дан отрезок длины 1. Постройте отрезки длины: 1) $\sqrt{13}$;

2) $\sqrt{3\sqrt{5}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{10}-2}$.

78. **Использование движений в задачах на построение.** Постройте равносторонний треугольник с вершинами на трех данных параллельных прямых.

79. **ГМТ.** A и B — фиксированные точки окружности, C — произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения 1) биссектрис; 2) медиан; 3) высот треугольника ABC .

80. **ГМТ.** 1) Из данной точки окружности проведены всевозможные хорды. 2) Из данной точки вне круга проведены к нему всевозможные секущие. Найдите геометрические места середин всех образовавшихся хорд (пп.1 и 2).

81. **ГМТ. Гомотетия.** Дана окружность радиуса R с центром в точке O и точка S такая, что $SO = 3R$. Какое множество образуют середины отрезков, соединяющих точку S с точками окружности?

Часть 4. Программа экзамена по геометрии за курс 7–9 классов

1. Равенство геометрических фигур. Признаки равенства треугольников.
2. Свойства и признаки равнобедренного треугольника. Теорема Штейнера-Лемуса.
3. Параллельные прямые. Признаки и свойства параллельных прямых.
4. Теорема о сумме углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника. Суммы внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника.
5. Геометрические построения. Основные построения с помощью циркуля и линейки.
6. Параллелограмм: признаки, свойства.
7. Прямоугольник, ромб, квадрат: их свойства и признаки.
8. Трапеция и её виды: свойства, признаки.
9. Теорема Фалеса. Деление отрезка на n равных частей. Построение четвёртого пропорционального отрезка.
10. Свойства и признаки средней линии треугольника.
11. Свойства средней линии трапеции. Замечательное свойство трапеции.
12. Биссектриса треугольника. Свойства биссектрис внутренних углов треугольника.
13. Медиана треугольника. Свойства медиан треугольника.
14. Высота треугольника. Свойства высот треугольника.
15. Теорема Пифагора и теорема, обратная к ней.
16. Неравенство треугольника.
17. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла: определения; их независимость от расположения и размеров треугольника; значения некоторых острых углов; их изменение при возрастании угла.
18. Тригонометрические функции углов от 0° до 180° . Основное тригонометрическое тождество и его следствия. Формулы приведения.
19. Декартова система координат. Основные формулы: формула расстояния между двумя точками, формула середины отрезка, деление отрезка в данном отношении.
20. Декартова система координат. Уравнение фигуры. Уравнения окружности и прямой.
21. Угловой коэффициент в уравнении прямой. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

22. Движение. Общие свойства движений. Виды движений.
23. Векторы. Определение и свойства линейных операций над векторами. Коллинеарные векторы.
24. Скалярное произведение векторов и его свойства.
25. Подобие геометрических фигур. Гомотетия. Признаки подобия треугольников.
26. Прямоугольный треугольник. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике. Признаки равенства прямоугольных треугольников.
27. Теоремы о пропорциональности отрезков хорд, пропорциональности отрезков секущих, о квадрате отрезка касательной к окружности. Степень точки относительно окружности.
28. Теорема Чевы.
29. Теорема Менелая.
30. Касательная к окружности: её свойство и признак. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки.
31. Свойства углов, вписанных в окружность. Геометрическое место точек из которых данный отрезок виден под данным углом.
32. Угол между хордами, секущими. Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания.
33. Свойства и признаки вписанного четырехугольника.
34. Свойство и признак описанного четырехугольника.
35. Теорема косинусов.
36. Теорема синусов. Обобщённая теорема синусов.
37. Соотношения между углами треугольника и противолежащими сторонами. Решение треугольников.
38. Правильные многоугольники. Основные метрические соотношения в правильном многоугольнике.
39. Понятие площади простых геометрических фигур. Площадь прямоугольника, параллелограмма.
40. Площадь треугольника, трапеции, произвольного четырёхугольника.
41. Формула Герона.
42. Существование окружности, описанной около треугольника. Выражение площади треугольника через радиус описанной окружности.
43. Существование окружности, вписанной в треугольник. Выражение площади треугольника через радиус вписанной окружности.
44. Длина дуги окружности. Площадь круга и его частей.

Часть 5. Билеты. 9 класс**Билет №1**

1. Равенство геометрических фигур. Признаки равенства треугольников.
2. Свойства средней линии трапеции. Замечательное свойство трапеции.

Билет №2

1. Подобие геометрических фигур. Гомотетия. Признаки подобия треугольников.
2. Прямоугольник, ромб, квадрат: их свойства и признаки.

Билет №3

1. Понятие площади геометрических фигур. Площадь прямоугольника, параллелограмма.
2. Теорема косинусов.

Билет №4

1. Движение. Общие свойства движений. Виды движений.
2. Касательная к окружности: её свойство и признак. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки.

Билет №5

1. Трапеция и её виды: свойства, признаки.
2. Теорема Менелая.

Билет №6

1. Декартова система координат. Основные формулы: формула расстояния между двумя точками, формула середины отрезка, деление отрезка в данном отношении.
2. Существование окружности, описанной около треугольника. Выражение площади треугольника через радиус описанной окружности.

Билет №7

1. Параллелограмм. Признаки и свойства.
2. Неравенство треугольника.

Билет №8

1. Свойства и признаки равнобедренного треугольника. Теорема Штейнера-Лемуса.
2. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла: определения; их независимость от расположения и размеров треугольника; значения некоторых острых углов; их изменение при возрастании угла.

Билет № 9

1. Правильные многоугольники. Основные метрические соотношения в правильном многоугольнике.
2. Теорема Чевы.

Билет №10

1. Параллельные прямые. Признаки и свойства параллельных прямых.
2. Теорема синусов. Обобщённая теорема синусов.

Билет №11

1. Биссектриса треугольника. Свойства биссектрис внутренних углов треугольника.
2. Длина дуги окружности. Площадь круга и его частей.

Билет №12

1. Медиана треугольника. Свойства медиан треугольника.
2. Свойства углов, вписанных в окружность. Геометрическое место точек из которых данный отрезок виден под данным углом.

Билет №13

1. Высота треугольника. Свойство высот треугольника.
2. Свойство и признак описанного четырехугольника.

Билет №14

1. Тригонометрические функции углов от 0° до 180° . Основное тригонометрическое тождество и его следствия. Формулы приведения.
2. Свойства и признаки средней линии треугольника.

Билет №15

1. Соотношения между углами треугольника и противолежащими сторонами. Решение треугольников.
2. Геометрические построения. Основные построения с помощью циркуля и линейки.

Билет №16

1. Теоремы о пропорциональности отрезков хорд, пропорциональности отрезков секущих, о квадрате отрезка касательной к окружности. Степень точки относительно окружности.
2. Угловой коэффициент в уравнении прямой. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Билет №17

1. Векторы. Определение и свойства линейных операций над векторами. Коллинеарные векторы.
2. Теорема Пифагора и теорема, обратная к ней.

Билет №18

1. Скалярное произведение векторов и его свойства.
2. Существование окружности, вписанной в треугольник. Выражение площади треугольника через радиус вписанной окружности.

Билет №19

1. Декартова система координат. Уравнение фигуры. Уравнения окружности и прямой.
2. Свойства и признаки вписанного четырехугольника.

Билет №20

1. Теорема о сумме углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника. Суммы внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника.
2. Формула Герона.

Билет №21

1. Прямоугольный треугольник. Пропорциональные в прямоугольном треугольнике. Признаки равенства прямоугольных треугольников.
2. Угол между хордами, секущими. Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания.

Билет №22

1. Теорема Фалеса. Деление отрезка на n равных частей. Построение четвёртого пропорционального отрезка.
2. Площадь треугольника, трапеции, произвольного четырехугольника.