

## Задачи к зачёту по стереометрии (на координатно-векторный способ). 11 класс

1. Точки  $M$  и  $P$  расположены на боковых рёбрах  $SA$  и  $SB$  четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершинами  $S(1; -1; 9)$ ,  $A(4; -4; 0)$ ,  $B(7; -5; 1)$ ,  $C(5; -1; 2)$ ,  $D(1; 1; 1)$ , причём  $AM : MS = 1 : 2$  и  $BP = PS$ . Найдите угол между прямыми  $CM$  и  $DP$ .
2. В четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S(1; -2; 2)$  и основанием  $ABCD$ , где  $A(-3; 2; 3)$ ,  $B(0; -3; 2)$ ,  $C(3; -4; 3)$ ,  $D(1; 0; 4)$ , найдите угол между плоскостями  $SAC$  и  $SBD$ .
3. Точка  $M$  – середина бокового ребра  $SA$  четырёхугольной пирамиды  $SABCD$ . Найдите угол между прямой  $CM$  и плоскостью  $SBD$ , если  $A(5; 2; 3)$ ,  $B(7; -2; 2)$ ,  $C(4; -1; 1)$ ,  $D(1; 4; 2)$ ,  $S(5; 0; 1)$ .
4. Найдите длину высоты четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с вершиной  $S(2; 2; 1)$  и основанием  $ABCD$ , где  $A(-1; 3; 1)$ ,  $B(3; 1; 2)$ ,  $C(5; -3; 1)$ ,  $D(2; -2; 0)$ .
5. Отрезок  $DH$  является высотой тетраэдра  $ABCD$  с вершинами  $A(4; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 5)$ ,  $D(0; 0; 0)$ . Найдите координаты точки  $H$ .
6. В тетраэдре  $ABCD$  с вершинами  $A(2; 1; -3)$ ,  $B(-3; 3; 1)$ ,  $C(-1; 1; 4)$ ,  $D(7; -2; 1)$  на ребре  $BD$  взята такая точка  $P$ , что  $BP : PD = 2 : 3$ . Найдите расстояние от точки  $P$  до прямой  $AC$ .
7. В тетраэдре  $ABCD$  с вершинами  $A(2; 4; -1)$ ,  $B(-3; 2; 4)$ ,  $C(2; -2; 1)$ ,  $D(5; 4; -4)$  точки  $M$  и  $P$  – середины рёбер  $AC$  и  $BD$  соответственно. Через прямую  $MP$  проведена плоскость, параллельная прямой  $BC$ . Запишите уравнение этой плоскости.
8. В тетраэдре  $ABCD$  с вершинами  $A(-3; 3; 0)$ ,  $B(0; -2; 1)$ ,  $C(-2; 1; 0)$ ,  $D(7; 5; 1)$  на ребре  $BD$  взята такая точка  $P$ , что  $BP : PD = 4 : 3$ . Через точку  $P$  проведена плоскость, параллельная плоскости  $ABC$ . Запишите уравнение этой плоскости.
9. В тетраэдре  $ABCD$  с вершинами  $A(-1; 5; 2)$ ,  $B(2; 0; 3)$ ,  $C(0; 3; 2)$ ,  $D(-2; 0; -1)$  на ребре  $BD$  взята такая точка  $P$ , что  $BP : PD = 1 : 3$ . Через точку  $P$  проведена прямая, перпендикулярная плоскости  $ABC$ . Запишите систему параметрических уравнений этой прямой.
10. Дана прямая треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$  с вершинами  $A(3; 3\sqrt{3}; 0)$ ,  $B(0; 0; 0)$ ,  $C(6; 0; 0)$ ,  $A_1(3; 3\sqrt{3}; 4)$ ,  $B_1(0; 0; 4)$ ,  $C_1(6; 0; 4)$ . На прямой  $BB_1$  поставлена точка  $M$ , так, что  $B_1$  – середина отрезка  $BM$ , а на ребре  $A_1C_1$  взята точка  $K$ , такая что  $A_1K : A_1C_1 = 2 : 3$ . Найти расстояние между скрещивающимися прямыми  $AM$  и  $CK$ .

11. На рёбрах  $AB$ ,  $AC$  и  $MC$  правильной пирамиды  $MABC$ , у которой все плоские углы при вершине  $M$  прямые, взяты соответственно точки  $D$ ,  $E$  и  $F$  – середины этих рёбер. Найти угол между прямыми  $DF$  и  $ME$ .

12. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  высота пирамиды равна 6, а апофема пирамиды равна 10. Точка  $E$  — середина  $SB$ . Найдите: а) расстояние от точки  $S$  до плоскости  $(AEC)$ ; б) угол между плоскостями  $(BDS)$  и  $(AEC)$ .

13. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , все ребра которой равны 1, найти расстояние между прямыми  $A_1 C$  и  $EK$ , где точка  $K$  расположена на прямой  $CC_1$  так, что  $C_1$  – середина  $CK$ .

14. Отношение стороны основания правильной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  к её боковому ребру равно  $1:\sqrt{3}$ . Рассматривается сечение призмы плоскостью, проходящей через вершину  $C$ , перпендикулярно прямой  $BC_1$ . Найти угол между секущей плоскостью и прямой  $A_1 C$ .

15. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отношение рёбер  $AB : AD : AA_1 = 1 : 3 : 2$ . Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершину  $D_1$ , перпендикулярно прямой  $B_1 D$ , указав, в каком отношении вершины сечения делят рёбра параллелепипеда.

16. Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  таковы, что  $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$ . Какое наибольшее значение может принимать выражение  $2x + y - z$ ?

17. а) Для каждого значения числа  $a$  определите, какую фигуру задает уравнение

$$x^2 + 10x + y^2 - y + z^2 = a.$$

б) Каков геометрический смысл выражения

$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 8z + 25}$ ? Укажите наименьшее значение данного выражения.

18. В куб с ребром  $a$  вписан шар. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки шаровой поверхности до вершин куба постоянна. Найдите эту сумму.

19. Через вершину нижнего основания единичного куба проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара. Эта плоскость отсекает от верхнего основания треугольник площади  $S$ . Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

## Задачи к зачёту по стереометрии. 11 класс

1

В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с большим основанием  $AD$ . Диагонали пересекаются в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины боковых сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$  и  $N$  параллельно прямой  $SO$ .

- Докажите, что сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$  является трапецией.
- Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\alpha$ , если  $AD = 10$ ,  $BC = 8$ ,  $SO = 8$ , а прямая  $SO$  перпендикулярна прямой  $AD$ .

2

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $AB$  равна 4, а боковое ребро  $SA$  равно 7. На рёбрах  $CD$  и  $SC$  отмечены точки  $N$  и  $K$  соответственно, причём  $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KN$  и параллельна прямой  $BC$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $SA$ .
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $SBC$ .

3

В основании правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит треугольник  $ABC$ . На прямой  $AA_1$  отмечена точка  $D$  так, что  $A_1$  — середина  $AD$ . На прямой  $B_1C_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $C_1$  — середина  $B_1E$ .

- Докажите, что прямые  $A_1B_1$  и  $DE$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $DE$ , если  $AB = 3$ , а  $AA_1 = 1$ .

4

Точка  $E$  лежит на высоте  $SO$ , а точка  $F$  — на боковом ребре  $SC$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$ , причём  $SE : EO = SF : FC = 2 : 1$ .

- Докажите, что плоскость  $BEF$  пересекает ребро  $SD$  в его середине.
- Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $BEF$ , если  $AB = 8$ ,  $SO = 14$ .

5

В призме  $ABCA_1B_1C_1$  вершина  $A_1$  равноудалена от вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Боковое ребро равно 13, стороны основания  $AB = AC = 10$ ,  $CB = 12$ .

- Докажите, что грань  $BB_1C_1C$  является прямоугольником.
- Найдите площадь полной поверхности призмы.

6

В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  сторона основания  $AB$  равна 7, а боковое ребро  $SA$  равно 10. На рёбрах  $BC$  и  $SC$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $BM = 4$ ,  $SK = 7$ .

- Докажите, что плоскость  $MKD$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .
- Найдите объём пирамиды  $CDKM$ .

7

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 9, а боковое ребро  $SA$  равно  $\sqrt{43}$ . На рёбрах  $AB$  и  $SB$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно, причём  $AM = 8$ ,  $SK : KB = 7 : 3$ . Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $ABC$  и содержит точки  $M$  и  $K$ .

- Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .
- Найдите площадь сечения пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

8

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона  $AB$  основания равна 8, а боковое ребро  $AA_1$  равно 7. На ребре  $CC_1$  отмечена точка  $M$ , причем  $CM = 1$ .

- а) Точки  $O$  и  $O_1$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  соответственно. Докажите, что прямая  $OO_1$  содержит точку пересечения медиан треугольника  $ABM$ .
- б) Найдите расстояние от точки  $A_1$  до плоскости  $ABM$ .

9

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка  $M$  — середина ребра  $A_1C_1$ , а точка  $O$  — точка пересечения диагоналей боковой грани  $ABB_1A_1$ .

- а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью  $AMB$ , лежит на отрезке  $OC_1$ .
- б) Найдите угол между прямой  $OC_1$  и плоскостью  $AMB$ .

10

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $SA$  равно 5. На рёбрах  $AB$  и  $SC$  отмечены точки  $K$  и  $M$  соответственно, причём  $AK : KB = SM : MC = 5 : 1$ . Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $KM$  и параллельна  $SA$ .

- а) Докажите, что сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$  — прямоугольник.
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка  $A$ , а основанием — сечение пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

11

Радиус основания конуса с вершиной  $S$  и центром основания  $O$  равен 5, а его высота равна  $\sqrt{51}$ . Точка  $M$  — середина образующей  $SA$  конуса, а точки  $N$  и  $B$  лежат на основании конуса, причём прямая  $MN$  параллельна образующей конуса  $SB$ .

- а) Докажите что  $\angle ANO$  — прямой.
- б) Найдите угол между прямой  $BM$  и плоскостью основания конуса, если  $AB = 8$ .

12

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$  и  $B$ , а на окружности другого основания — точки  $B_1$  и  $C_1$ , причем  $BB_1$  — образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол  $ABC_1$  прямой.
- б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $AC_1$ , если  $AB = 21$ ,  $BB_1 = 12$ ,  $B_1C_1 = 16$ .

13

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности другого основания — точка  $C_1$  причём  $CC_1$  — образующая цилиндра, а  $AC$  — диаметр основания. Известно, что  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $CC_1 = 4\sqrt{6}$ .

- а) Докажите, что угол между прямыми  $BC$  и  $AC_1$  равен  $60^\circ$ .
- б) Найдите расстояние от точки  $B$  до  $AC_1$ .

**14**

На продолжениях рёбер  $AA_1$  и  $D_1C_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно, причём  $A$  – середина  $A_1K$ ,  $C_1$  – середина  $D_1L$ .

- Докажите, что прямая  $KL$  проходит через середину ребра  $BC$ .
- Найдите угол между прямыми  $AD_1$  и  $KL$ , если  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $AD = 6$ ,  $AA_1 = 8$ .

**15**

На ребре  $AB$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  отмечена точка  $Q$ , причём  $AQ : QB = 1 : 2$ . Точка  $P$  — середина ребра  $AS$ .

- Докажите, что плоскость  $DPQ$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- Найдите площадь сечения  $DPQ$ , если площадь сечения  $DSB$  равна 6.

**16**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все рёбра равны 4. Точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .

- Докажите, что прямые  $MB$  и  $B_1C$  перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми  $MB$  и  $B_1C$ .

**17**

Сечением прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $\alpha$ , содержащей прямую  $BD_1$  и параллельной прямой  $AC$ , является ромб.

- Докажите, что грань  $ABCD$  — квадрат.
- Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $BCC_1$ , если  $AA_1 = 6$ ,  $AB = 4$ .

**18**

На ребрах  $AB$  и  $BC$  треугольной пирамиды  $ABCD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $AM : MB = CN : NB = 1 : 3$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $DA$  и  $DC$  соответственно.

- Доказать, что  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  и  $N$  лежат в одной плоскости.
- Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость  $PQM$  разбивает пирамиду.

**19**

Основанием четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  является прямоугольник  $ABCD$ , причём  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $BC = 2\sqrt{6}$ . Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин  $A$  и  $C$  опущены перпендикуляры  $AP$  и  $CQ$  на ребро  $SB$ .

- Докажите, что  $P$  — середина  $BQ$ .
- Найдите угол между гранями  $SBA$  и  $SBC$ , если  $SD = 6$ .

**20**

В треугольной пирамиде  $PABC$  с основанием  $ABC$  известно, что  $AB = 13$ ,  $PB = 15$ ,  $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$ . Основанием высоты этой пирамиды является точка  $C$ . Прямые  $PA$  и  $BC$  перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды  $PABC$ .

21

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания равна 12, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $3\sqrt{6}$ . На рёбрах  $AB$  и  $B_1C_1$  отмечены точки  $K$  и  $L$ , соответственно, причём  $AK=2$ ,  $B_1L=4$ . Точка  $M$  — середина ребра  $A_1C_1$ . Плоскость  $\gamma$  параллельна ребру  $AC$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- а) Докажите, что прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .
- б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\gamma$ .

22

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона  $AB$  основания равна  $2\sqrt{3}$ , а высота  $SH$  пирамиды равна 3. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $CD$  и  $AB$ , соответственно, а  $NT$  — высота пирамиды  $NSCD$  с вершиной  $N$  и основанием  $SCD$ .

- а) Докажите, что точка  $T$  является серединой  $SM$ .
- б) Найдите расстояние между  $NT$  и  $SC$ .

23

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны длины рёбер:  $AB=4$ ,  $BC=3$ ,  $AA_1=2$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины рёбер  $A_1B_1$  и  $CC_1$  соответственно. Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $B_1C_1$  в точке  $U$ .

- а) Докажите, что  $B_1U : UC_1 = 2 : 1$ .
- б) Найдите площадь сечения параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью  $APQ$ .

24

В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ ,  $AC=4$ ,  $BC=16$ ,  $AA_1=4\sqrt{2}$ . Точка  $Q$  — середина ребра  $A_1B_1$ , а точка  $P$  делит ребро  $B_1C_1$  в отношении  $1 : 2$ , считая от вершины  $C_1$ . Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- а) Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .
- б) Найдите расстояние от точки  $A_1$  до плоскости  $APQ$ .

25

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все рёбра равны 7. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB=4$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- а) Докажите, что  $A_1P : PB_1 = 1 : 3$ , где  $P$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью  $\alpha$ .

26

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  все рёбра равны 5. На рёбрах  $SA$ ,  $AB$ ,  $BC$  взяты точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  соответственно так, что  $PA=AQ=RC=2$ .

- а) Докажите, что плоскость  $PQR$  перпендикулярна ребру  $SD$ .
- б) Найдите расстояние от вершины  $D$  до плоскости  $PQR$ .

**27**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $AB$  равна 24, а боковое ребро  $SA$  равно 19. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $MN$  и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит медиану  $CE$  основания в отношении  $5 : 1$ , считая от точки  $C$ .
- б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды  $SABC$  плоскостью  $\alpha$ .

**28**

В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  противоположные боковые грани перпендикулярны. Высота пирамиды равна  $h$ .

- а) Докажите, что треугольник  $BDK$  является равнобедренным с углом  $120^\circ$ , где  $K$  — основание перпендикуляра из центра основания  $ABCD$  до бокового ребра  $SC$ .
- б) Найдите радиус шара, касающегося рёбер основания и боковых рёбер пирамиды или их продолжений.

**29**

Дан тетраэдр  $ABCD$ . Известно, что центр сферы, описанной около этого тетраэдра, лежит на  $AB$ , что плоскости  $ABC$  и  $ABD$  перпендикулярны и что  $AD = DC = CB$ .

- а) Докажите, что центр сферы совпадает с основанием высоты тетраэдра, проведенной из вершины  $D$ .
- б) Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $CB$ .

**30**

Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , грани  $ABCD$  и  $CDD_1 C_1$  которого являются прямоугольниками. Сфера  $S$  касается прямых  $B_1 C_1$  и  $C_1 D_1$ , плоскости  $CDD_1$ , а также плоскости  $ABC$  в точке  $A$ . Эта сфера повторно пересекает отрезок  $AC_1$  в точке  $M$ . Известно, что  $AM = 5$ ,  $C_1 M = 3$ .

- а) Докажите, что центр сферы лежит в плоскости грани  $AA_1 D_1 D$  (вне самой грани).
- б) Найдите объём параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .