

Задачи к экзамену по стереометрии в 10 классе

Векторы и координаты

- Векторная формула медианы тетраэдра.** Докажите, что если M – точка пересечения медиан треугольника ABC , а O – произвольная точка пространства, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
- Формула бимедианы** («средней линии» тетраэдра). Пусть M и N – середины отрезков AD и BC соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.
- Коллинеарные векторы.** В тетраэдре $PABC$ точки M и N – центры тяжести граней соответственно PAB и PBC . Докажите, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{3}AC$.
- Коллинеарные векторы.** В наклонной треугольной призме проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и параллельная основаниям. Докажите, что точки пересечения медиан оснований и сечения лежат на одной прямой.
- Признак компланарности векторов.** В тетраэдре $ABCD$ точки M и H – середины ребер AD и BC . Докажите, что прямые AB , HM и DC параллельны одной плоскости.
- Признак компланарности векторов.** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и F – середины отрезков BD и $C_1 C$. Докажите, что прямые BC_1 , EF и DC параллельны одной плоскости.
- Разложение вектора в пространстве.** K – середина медианы AE треугольника ABC , M – произвольная точка пространства. Разложите вектор \overrightarrow{MK} по векторам \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{MB} , \overrightarrow{MC} .
- Разложение вектора в пространстве.** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Медианы треугольника $AD_1 C$ пересекаются в точке M . Разложите вектор \overrightarrow{BM} по векторам \overrightarrow{BA} , $\overrightarrow{BB_1}$, \overrightarrow{BC} .
- Скалярное произведение векторов.** Единичные векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол 60° , а единичный вектор \vec{c} им перпендикулярен. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
- Скалярное произведение векторов.** Докажите, что угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а другая – диагональ грани куба, равен 90° .
- Скалярное произведение векторов.** Используя скалярное произведение векторов, найдите наибольшее значение выражения $2x + 3y + 6z$ при условии, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. При каких значениях переменных достигается это значение?
- Расстояние между точками.** Объяснить геометрический смысл уравнения и решить его:
 - $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = 1$;
 - $\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$.
- Расстояние между точками.** Даны точки $A(-1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ и $C(0; -1; 1)$. Найдите точку, равноудалённую от этих точек и расположенную на координатной плоскости Oxy .

14. **Метод координат.** $ABCD$ – прямоугольник, M – произвольная точка пространства. Докажите, что $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
15. **Угол между прямыми в координатах.** Прямая, выходящая из начала координат, образует с координатными осями углы α , β и γ . Найдите значение выражения $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$.
16. **Метод координат.** Найдите на трёх попарно скрещивающихся рёбрах куба такие точки K , L , M , сумма квадратов расстояний между которыми наименьшая возможная.
17. **Координаты и векторы.** Докажите, что точка $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$ является точкой пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$.
18. **Уравнение плоскости.** Найдите все точки плоскости $2x + 3y - z - 5 = 0$, равноудалённые от координатных плоскостей.
19. **Уравнение плоскости.** Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(5; -6; 1)$, $B(1; 8; 0)$, $C(0; 2; 0)$.
20. **Угол между плоскостями в координатах.** Найдите косинусы углов, образованных плоскостью $3x - 5y + z - 8 = 0$ и координатными плоскостями.
21. **Угол между плоскостями в координатах.** Докажите, что сумма квадратов косинусов углов, образованных произвольной плоскостью с тремя попарно перпендикулярными плоскостями, равна 1.
22. **ГМТ.** Найдите множество таких точек, сумма квадратов расстояний которых до точек $A(3; 8; 1)$ и $B(1; -1; 3)$ равна сумме квадратов их расстояний до точек $C(0; -1; 3)$ и $D(1; 5; -2)$.
23. **ГМТ.** Найдите множество точек, равноудалённых от точек $A(-2; 1; -1)$ и $B(4; -1; 3)$.
24. **ГМТ. Расстояние от точки до плоскости.** Найдите геометрическое место точек, удалённых от плоскости $x + 2y - 2z - 5 = 0$ на расстояние 2.
25. **Геометрический смысл коэффициентов в уравнении плоскости.** Найдите координаты всех векторов единичной длины, перпендикулярных плоскости $3x - 2y + z + 1 = 0$.
26. **Геометрический смысл коэффициентов в уравнении плоскости.** Определите величину угла между плоскостями, заданными уравнениями $2x - y + 5z - 3 = 0$ и $x - 3y + 4z + 20 = 0$.
27. **Уравнение плоскости.** Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 2; 4)$ параллельно векторам $\vec{a}(2; -1; 3)$ и $\vec{b}(-4; 2; 1)$.
28. **Метод координат. Расстояние от точки до плоскости.** Известно, что в треугольной пирамиде все плоские углы при вершине – прямые. Найдите длину высоты пирамиды из этой вершины, если длины её боковых рёбер равны a , b и c .

29. **Пересечение прямой и плоскости.** Найдите координаты точки пересечения плоскости, заданной уравнением $x + y + z = 0$, и прямой, проходящей через точки $A(-3; -1; 0)$, $B(4; -2; 0)$.
30. **Проекция точки на плоскость.** Найдите координаты ортогональной проекции точки $M(-4; 1; 3)$ на плоскость $2x + 2y + 3z + 7 = 0$.

Разные задачи

1. **Параллельность прямой и плоскости.** Дана трапеция $ABCD$, вершины которой лежат по одну сторону от плоскости α . Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 являются перпендикулярами, опущенными на эту плоскость, причём $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$. Докажите, что основания трапеции параллельны плоскости α .
2. **Параллельность прямых и плоскостей.** В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных точек: A, B, C, D, E и F . Известно, что отрезки AB и DE , BC и EF , CD и FA попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки попарно равны.
3. **Параллельность прямой и плоскости. Сечение тетраэдра.** Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . Постройте сечение, проходящее через центр основания ABC параллельно прямым AC и BD , и найдите его площадь.
4. **Параллельность прямой и плоскости. Сечение тетраэдра.** Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a . Постройте сечение наибольшей площади параллельное прямым AC и BD .
5. **Сечение тетраэдра.** На рёбрах PA , PB и AC тетраэдра $PABC$ отмечены точки M , N и K соответственно. Известно, что M – середина AP , $PN : NB = 2 : 1$, $AK : KC = 4 : 1$. Плоскость MKN пересекает ребро BC в точке L . В каком отношении точка L делит ребро BC ?
6. **Теорема о трёх перпендикулярах.** В треугольнике ABC $AC = BC = 10$ см, величина угла B равна 30° . Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника, $BD = 5$ см. Найдите расстояние от точки D до прямой AC и расстояние от точки B до плоскости ADC .
7. **Теорема о трёх перпендикулярах. Перпендикулярные плоскости.** Известно, что в треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершине D – прямые. H – проекция точки D на плоскость ABC . Докажите, что H – точка пересечения высот треугольника ABC .
8. **Расстояние от точки до прямой. Правильная четырёхугольная пирамида.** Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 6 см. Точка M удалена от каждой его вершины на 17 см. Найдите расстояния от середины отрезка MA до прямых, содержащих стороны квадрата.
9. **Расстояние от точки до плоскости.** В правильной треугольной пирамиде стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. Вычислите расстояние от вершины основания до противоположной боковой грани.
10. **Скрещивающиеся прямые. Расстояние.** Найдите расстояние между двумя непересекающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно a .

11. **Скрещивающиеся прямые. Расстояние. Углы.** Найдите расстояния и углы между диагональю AC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и каждой из скрещивающихся с ней диагоналей грани этого куба, если ребро куба равно 1.
12. **Скрещивающиеся прямые. Углы.** Все рёбра тетраэдра $PABC$ равны a . M и N – середины рёбер PB и PC соответственно. Найдите угол между прямыми AM и BN .
13. **Скрещивающиеся прямые. Расстояние.** Основание пирамиды $PABCDEF$ – правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a . Боковое ребро пирамиды равно $2a$. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AB и PE .
14. **Сечение куба. Перпендикулярность плоскостей.** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ AC_1 равна $2\sqrt{3}$. Точки M , N и P – середины соответственно рёбер $B_1 C_1$, $D_1 C_1$ и DD_1 . а) Найдите периметр сечения куба плоскостью MNP ; б) Докажите, что плоскости $AA_1 C_1$ и MNP взаимно перпендикулярны.
15. **Перпендикулярность плоскостей.** Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна 20,25. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30° и 60° . Найдите высоту пирамиды.
16. **Угол между прямой и плоскостью.** Наклонная образует с плоскостью угол 45° . Через основание наклонной в плоскости проведена прямая под углом 45° к проекции наклонной. Найдите угол между этой прямой и наклонной.
17. **Угол между прямой и плоскостью.** Три луча с общим началом попарно образуют углы, равные 60° . Найдите угол наклона одного из лучей к плоскости двух других.
18. **Угол между прямой и плоскостью.** Прямая проходит через вершину прямого угла BAC и образует с его сторонами углы в 60° и 45° . Какой угол она образует с плоскостью BAC ?
19. **Сечение куба. Угол между плоскостями.** Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины трёх попарно скрещивающихся рёбер куба, и найдите угол между плоскостью этого сечения и плоскостью одной из граней куба.
20. **Сечение куба. Площадь.** Найдите площадь сечения куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно прямым AB_1 и BK , где K – середина ребра CC_1 , если ребро куба равно a .
21. **Параллельное проектирование.** Дано изображение равнобедренного треугольника ABC , у которого $AB = AC$, и его высоты BK . Постройте изображение центра описанной окружности треугольника ABC .
22. **Параллельное проектирование.** На изображении треугольника, длины сторон которого пропорциональны числам 2, 3 и 4, постройте изображение его центра вписанной окружности.
23. **Ортогональное проектирование.** Отрезок CD перпендикулярен плоскости треугольника ABC . Известно, что площадь треугольника ABC равна S , а площадь треугольника ABD равна Q . Найдите площадь ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость ABD .

24. **Наклонные.** Из точки вне плоскости проведены к этой плоскости перпендикуляр и две равные наклонные, образующие углы α с перпендикуляром. Угол между наклонными равен β . Найдите угол между проекциями наклонных.
25. **Свойства пирамид.** Даны три утверждения: 1) боковые рёбра пирамиды равны; 2) боковые рёбра пирамиды равнонаклонены к плоскости основания; 3) вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания. Докажите, что из каждого из этих утверждений следуют остальные.
26. **Свойства пирамид.** Даны три утверждения: 1) высоты боковых граней пирамиды, проведённые из вершины пирамиды к сторонам основания, равны; 2) боковые грани равнонаклонены к плоскости основания; 3) вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной (или невписанной для треугольной пирамиды) в основание. Докажите, что из каждого из этих утверждений следуют остальные.
27. **Высоты боковых граней пирамиды равны.** В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник со стороной 1. Все боковые грани равновелики основанию. Вычислите высоту этой пирамиды.
28. **Свойство бимедиан тетраэдра.** Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра (они называются бимедианами тетраэдра), пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
29. **Свойства параллелепипеда.** Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$:
а) проходит через точку пересечения медиан треугольника $A_1 B D$; б) делится на три равные части плоскостями $A_1 B D$ и $B_1 D_1 C$.
30. **Линейный угол двугранного угла.** Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол 60° . Общее основание равно 16 м, боковая сторона одного треугольника 17 м, а боковые стороны другого перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников.
31. **Линейный угол двугранного угла.** Угол между плоскостями равен 60° . Точка удалена от этих плоскостей на расстояния 12 и 15. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.
32. **Линейный угол двугранного угла.** Квадрат $ACMD$ и правильный треугольник ABC расположены в двух плоскостях, угол между которыми равен 60° . Найдите расстояния от точки B до плоскости квадрата и от точки M до плоскости треугольника, если $AC = 4$.
33. **Линейный угол двугранного угла.** Точка K – середина стороны AD квадрата $ABCD$. Квадрат «перегнули» по прямой KC так, что угол между плоскостями ABC и KDC равен 60° . Найдите отношение длины отрезка BD к длине диагонали квадрата.
34. **Развертка.** Ребро правильного тетраэдра равно a . Через вершину тетраэдра проведено сечение, являющееся треугольником. Докажите, что периметр P сечения удовлетворяет неравенствам $2a < P \leq 3a$.

35. **Кратчайшие пути.** На столе стоит правильная треугольная пирамида $PABC$ (сделанная из стекла), все рёбра которой равны 1. Муравей ползёт из точки M , лежащей на луче AB на расстоянии 2 от точки B , в точку N – середину ребра PC . Найдите длину его кратчайшего пути.
36. **ГМТ.** Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых.