«Математическая вертикаль»

2020/2021 уч. год

Материалы по алгебре к первому блоку 8 класса

Повторение. Логика. Уравнения с модулем

Предисловие

Этот материал составлен для повторения и подготовки к итоговой работе по курсу 7 класса, перенесённой на осень 2020 года из-за весеннего карантина. Также для этих целей может пригодиться подборка ключевых задач:
7 класс: `https://drive.google.com/file/d/1XmO3j9L7fGytrmcOWrIuHIyQXbdsBEPH/view`.

Кроме того, можно использовать задачник [1]. В ряде случаев мы даём прямые ссылки на упражнения из этого задачника, выделяя буквой «**З**» на полях и двумя чертами.

Раздел «Логика» включает в себя и новый материал. Мы считаем очень важным, чтобы все ребята именно сейчас хотя бы немного поупражнялись в логике. Но на усмотрение учителя из раздела «Логика» могут быть разобраны только основные примеры и первые упражнения, а более глубокое изучение темы оставлено на кружок и / или на будущее.

Замечания, вопросы, комментарии присылайте на почту `vertical.algebra@179.ru`.

Список используемых обозначений

- $\boxed{\rightarrow}$ отмечает примеры.
- $\boxed{?}$ отмечает вопросы.
- Звёздочкой «*» отмечены задачи и разделы, не входящие в обязательную программу. Часто они труднее остальных, иногда — гораздо труднее.
- З || отмечает ссылки на задачник [1].
- отмечает задачи-шутки.
- $\boxed{\mathcal{M}}$ отмечает место, где применяется какой-то специальный *метод* решения задач.
- Λ отмечает задачи на логику.

Содержание

1 Повторение курса 7 класса

1.1 Логика

1.1.1 Логика: необходимо, достаточно, $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Необходимо, достаточно, необходимо и достаточно — эти термины часто используются в математических текстах. Они очень важны и в повседневной жизни, для правильного понимания текстов и рассуждений, с которыми приходится встречаться. Правда, очень часто в повседневной жизни происходит путаница. Например, говорят: «Чтобы купить билет в кино за 350 рублей, *необходимо* иметь 350 рублей или более». Но на самом деле, если у вас есть *ровно* 350 рублей, то это *необходимо и достаточно*, чтобы купить такой билет в кино. А если у вас, например, 450 рублей, то это *достаточно*, чтобы купить такой билет. Если же так случилось, что у вас 349 рублей, то эта сумма лишь необходима, но не достаточна. Аналогично, 450 рублей — достаточная сумма, чтобы сделать покупку, а вовсе не необходимая.

Всё довольно запутанно. Так что нужно наводить порядок в логике рассуждений и чётко понимать, что означают термины и как обосновывать утверждения. Мы вернёмся к разговору про билет в кино позже, см. пример 3 и замечание 1.

Давайте разбираться. Сначала поговорим о суждениях типа «если. . . , то. . . ». Суждения бывают верными и неверными (истинными и ложными).

Задача 1. Рассмотрите суждения и выясните, какие из них истинны, а какие ложны.
а) Если в коридорах школы нет учеников, то наступили каникулы.
б) Если в коридорах школы нет учеников, то они на уроках.
в) Если средний рост ученика 8«А» равен 165 см, то в 8«А» нет ученика выше 179 см.
г) Если средний рост ученика 8«А» равен 165 см, то в 8«А» нет ученика ниже 165 см.
д) Если небо безоблачно, то дождь не идёт.
е) Если небо затянуто облаками, то пойдёт дождь.
ж) Если число не оканчивается на 2, то оно не делится на 2.
з) Если число делится на 6, то оно делится на 3.
и) Если число делится на 4 и на 6, то оно делится на 24.
к) Если в четырёхугольнике есть три прямых угла, то он прямоугольник.
л) Если число p простое, то p^2 — число нечётное.
м) Если сумма двух натуральных чисел не больше 3, то хотя бы одно из них равно 1.
н) Если сумма двух целых чисел не больше 3, то хотя бы одно из них равно 1.

Обозначения. Каждое из утверждений задачи 1 можно записать в виде

$$A \Rightarrow B,$$

например: $\boxed{A\text{: небо безоблачно}} \Rightarrow \boxed{B\text{: дождь не идёт}}$

Эту запись можно прочитать многими способами:

!

- *«из A следует B»*
- «*A влечёт B*»
- *«если верно A, то верно и B»*
- *«B является следствием A»*.

- из безоблачности *следует*, что дождь не идёт;
- безоблачность *влечёт* отсутствие дождя;
- *если* небо безоблачно, *то* дождь не идёт;
- отсутствие дождя *является следствием* безоблачности.

Утверждение A называют *условием* (*посылкой*), а B — *следствием* (*заключением*).

Пример 1. Рассмотрим утверждение: *Если фигура является квадратом, то она — четырёхугольник.* Здесь утверждение A — «фигура — квадрат», утверждение B — «фигура — четырёхугольник». Ясно, что утверждение «$A \Rightarrow B$» (то есть утверждение «если фигура является квадратом, то она — четырёхугольник») — истинно. Можно записать:

$$\boxed{A\text{: фигура — квадрат}} \Rightarrow \boxed{B\text{: фигура — четырёхугольник}}$$

В математике в таких случаях принято говорить, что утверждение B: *фигура является четырёхугольником* является необходимым условием того, что *фигура является квадратом*, то есть для утверждения A *необходимо* выполнение условия B.

Можно сказать иначе: утверждение A: *фигура является квадратом* — достаточное условие того, что *фигура является четырёхугольником*, то есть для того, чтобы утверждение B было верным, достаточно, чтобы верным было A.

Установить, является ли в данном случае условие B необходимым для условия A, то есть верно ли утверждение «$A \Rightarrow B$», можно двумя способами.

Способ 1. Предположим, что A верно, а B неверно, то есть фигура — квадрат, но не является четырёхугольником. Это противоречит определению квадрата, значит, наше предположение неверно, и если A верно, то обязательно верно и B. Этот способ называется **доказательством от противного.**

Способ 2. Пусть верно утверждение A, т.е. фигура является квадратом, тогда по определению квадрата получаем, что эта фигура — четырёхугольник, значит, верно утверждение B. Этот способ называется **прямым доказательством.**

Подводя итоги, скажем, что если утверждение «$A \Rightarrow B$» истинно, то

- утверждение B — необходимое условие для утверждения A;
- утверждение A — достаточное условие для утверждения B.

Иными словами,

- *любое следствие из утверждения A — необходимо для A;*
- *любое утверждение, из которого следует утверждение B — достаточно для B.*

Пример 2. Верно ли *обратное утверждение*: «Если фигура является четырёхугольником, то она является квадратом»?

Решение. Разумеется, это утверждение неверно, бывают и другие четырёхугольники. В данном случае это очевидно, но вообще говоря для опровержения следствия $B \Rightarrow A$ можно привести **контрпример**, то есть фигуру, для которой B верно, а A — неверно. В нашем случае *контрпримером* может быть, скажем, прямоугольник со сторонами 1 и 2: он является четырёхугольником, но не является квадратом.

Итак,

$$\boxed{B\text{: фигура — четырёхугольник}} \not\Rightarrow \boxed{A\text{: фигура — квадрат}},$$

и условие «фигура — четырёхугольник» не является достаточным для того, чтобы фигура была квадратом.

Ответ. Нет, неверно.

Определение 1. Если истинны оба утверждения «$A \Rightarrow B$» и «$B \Rightarrow A$», то утверждение A является *необходимым и достаточным* для утверждения B, а B *является необходимым и достаточным* для утверждения A. В таких случаях принято писать

$$A \Leftrightarrow B \qquad \text{или} \qquad B \Leftrightarrow A.$$

Читается так: *утверждения A и B равносильны* или, что то же самое, *утверждения A и B эквивалентны.*

Задача 2. Рассмотрите утверждения из задачи 1 и попробуйте сформулировать их, используя слова необходимо, достаточно, необходимо и достаточно.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 3.** Дано, что интересующий вас билет в кино стоит 350 рублей. Установите все следствия между следующими утверждениями. Нарисуйте схему, расставив обнаруженные «стрелочки». $\boxed{\text{Вы можете купить билет}}$, $\boxed{\text{У вас есть хотя бы 349 рублей}}$, $\boxed{\text{У вас есть хотя бы 350 рублей}}$, $\boxed{\text{У вас есть хотя бы 450 рублей}}$.

Ответ. См. схему ниже.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{Вы можете купить билет}} & \Leftrightarrow & \boxed{\text{У вас есть хотя бы 350 рублей}} \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ \boxed{\text{У вас есть хотя бы 349 рублей}} & & \boxed{\text{У вас есть хотя бы 450 рублей}} \end{array}$$

Замечание 1. Теперь, глядя на построенную в примере 3 схему, вернёмся к разговору про билет в кино в начале нашего текста. Два верхние утверждения в схеме равносильны — это синоним фразы «350 рублей необходимы и достаточны, чтобы купить билет». Наличие хотя бы 349 рублей следует (вытекает) из способности купить билет — синонимом будет, что для покупки билета необходимо иметь хотя бы 349 рублей. А стрелочка вверх справа говорит, что из наличия 450 рублей вытекает наличие 350 (и, что равносильно, способность купить билет). Синоним: наличие 450 рублей достаточно для покупки билета.

$\boxed{?}$ **Вопрос 2.** Какую стрелку можно добавить между двумя нижними утверждениями из схемы, полученной в примере 3? Как увидеть по уже нарисованной схеме, что это следствие имеет место?

Задача 3. Выясните, верны ли следующие утверждения

а) $\boxed{a+b=20} \Rightarrow \boxed{a=10}$

б) $\boxed{\begin{cases} a=5 \\ b=15 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{a+3b=50}$

в) $\boxed{a+3b=50} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=5 \\ b=15 \end{cases}}$

г) $\boxed{x=20} \Rightarrow \boxed{2x=40}$

д) $\boxed{x=20} \Leftrightarrow \boxed{2x=40}$

е) $\boxed{x=12} \Rightarrow \boxed{x^2=144}$

ж) $\boxed{x^2=121} \Rightarrow \boxed{x=11}$

з) $\boxed{\frac{x}{2}\text{ — целое}} \Leftrightarrow \boxed{x\text{ — целое}}$

и) $\boxed{\frac{3x}{2}\text{ — целое}} \Rightarrow \boxed{x\text{ — целое}}$

к) $\boxed{a+b=0{,}5} \Rightarrow \boxed{a^2+2ab+b^2=0{,}25}$

л) $\boxed{a-2=b} \Rightarrow \boxed{a^2-2a+4=b^2}$

м) $\boxed{a^2+b^2=100} \Rightarrow \boxed{a+b=10}$

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 4.** Установите все следствия между следующими утверждениями про натуральное число n. Нарисуйте схему, расставив обнаруженные «стрелочки».

1) $\boxed{n\text{ — нечётное}}$, 2) $\boxed{n\,\vdots\,5}$, 3) $\boxed{n\text{ оканчивается на 5}}$, 4) $\boxed{n^2\text{ — нечётное}}$

Решение. Посмотрим сначала, например, на первое и последнее утверждение. Квадрат нечётного числа — всегда нечётен, поэтому $\boxed{n\text{ — нечётное}} \Rightarrow \boxed{n^2\text{ — нечётное}}$. Верно ли обратное? Пусть n^2 — нечётно, может ли n не быть нечётным? Тогда n — чётно, и n^2 тоже чётно, а у нас оно нечётно, противоречие! Значит, обратное тоже верно, и утверждения эквивалентны (равносильны): $\boxed{n\text{ — нечётное}} \Leftrightarrow \boxed{n^2\text{ — нечётное}}$.

Рассмотрим теперь первое и второе утверждения. Если число нечётно, обязательно ли оно делится на 5? Необязательно, например, 7 не делится. Если число делится на 5, обязательно ли оно нечётно? Нет, например, 10 чётно. Значит, здесь ни в одну сторону нет следствия.

Рассмотрим первое и третье утверждение. Если число нечётно, обязательно ли оно оканчивается на 5? Конечно, нет. А наоборот? Если число оканчивается на 5, то оно нечётно — верно! Итак, $\boxed{n \text{ оканчивается на } 5} \Rightarrow \boxed{n \text{ — нечётное}}$.

Рассмотрим второе и третье утверждения. Если число делится на 5, то оно оканчивается на 5 — неверно, например, 10 на 5 не оканчивается. А наоборот? Если число оканчивается на 5, то оно делится на 5 — верно! Итак, $\boxed{n \text{ оканчивается на } 5} \Rightarrow \boxed{n \vdots 5}$.

Какие пары утверждений мы ещё не рассмотрели? Четвёртое со вторым, четвёртое с третьим? Нужно ли их рассматривать? Нет, так мы уже установили, что четвёртое утверждение равносильно первому, а для первого мы проверили все три случая.

Нарисуем получившуюся схему.

<u>Ответ.</u> (4) $\boxed{n^2 \text{ — нечётное}} \Leftrightarrow$ (1) $\boxed{n \text{ — нечётное}} \Leftarrow$ (3) $\boxed{n \text{ оканчивается на } 5} \Rightarrow$ (2) $\boxed{n \vdots 5}$.

? **Вопрос 3.** Какую стрелку можно поставить в примере 4 между утверждениями (3) и (4)? Как это увидеть по той схеме, которую мы нарисовали в ответе?

Задача 4. Расставьте все следствия между утверждениями про натуральное число n
1) $\boxed{n \text{ — чётное}}$, 2) $\boxed{n+1 \text{ — нечётное}}$, 3) $\boxed{n \text{ делится на } 4}$, 4) $\boxed{n \text{ делится на } 3}$

Задача 5. Расставьте все следствия между утверждениями про натуральное число a
1) $\boxed{a \vdots 3}$, 2) $\boxed{a \vdots 6 \text{ и } a \vdots 4}$, 3) $\boxed{a \vdots 24}$, 4) $\boxed{3a \vdots 9}$, 5) $\boxed{(\text{сумма цифр числа } a) \vdots 3}$

Задача 6. Расставьте все следствия между утверждениями про многоугольник F
1) $\boxed{F \text{ имеет четыре вершины}}$, 2) $\boxed{F \text{ — квадрат}}$, 3) $\boxed{F \text{ — четырёхугольник}}$,
4) $\boxed{F \text{ — прямоугольник}}$, 5) $\boxed{\text{Все углы } F \text{ — прямые}}$.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 5.** Сформулируйте и докажите достаточное, но не необходимое условие для делимости натурального числа a на 9.

Путь к решению. Нужно какое-нибудь свойство, из которого будет следовать, что число делится на 9. Какие числа делятся на 9? Возможно, вы скажете: «у которых сумма цифр делится на 9». Да, но это **необходимый и достаточный** признак, т.е. он описывает абсолютно все числа, делящиеся на 9, а нам сейчас *все* не нужны, только некоторые.

Решение. Например, точно делятся на 9 числа $9, 99, 999, 9999$ и т.д. Так что можно сказать: «*Если в записи натурального числа использованы только девятки, то это число делится на 9.*» Обратное неверно, и это как раз нам и требуется!

<u>Ответ.</u> Условие «записываться одними девятками» не является необходимым, но является достаточным для того, чтобы натуральное число делилось на 9.

? **Вопрос 4.** Подходит ли в качестве ответа к примеру 5 условие «$a = 27$»?

? **Вопрос 5.** Подходит ли в качестве ответа к примеру 5 свойство «число a можно представить в виде $a = 9k$, где k — натуральное»?

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 6.** Сформулируйте и докажите необходимый, но не достаточный признак делимости натурального числа a на 12.

Решение. Нам нужно *необходимое* свойство для делимости на 12 — то, без которого не обойтись! Какие числа *точно не делятся на 12*? Например, маленькие, меньшие 12.

<u>Ответ.</u> Условие «число a больше 11» необходимо для того, чтобы натуральное число a делилось на 12.

? **Вопрос 6.** Подходит ли в качестве ответа к примеру 6 свойство «число a — чётное»?

? **Вопрос 7.** Будет ли ответом к примеру 6 свойство «число a имеет вид $a = 120\ldots0$»?

? **Вопрос 8.** Подходит ли в качестве ответа к примеру 6 свойство «число a можно представить в виде $a = 12k$, где k — натуральное»?

Задача 7. Сформулируйте и докажите своё достаточное, но не необходимое условие для делимости натурального числа a на 2; на 3; на 4; на 9; на 12.

Задача 8. Сформулируйте и докажите свой необходимый, но не достаточный признак делимости натурального числа a на 2; на 3; на 4; на 9; на 12.

Задача 9. Сформулируйте и докажите необходимый и достаточный признак делимости натурального числа a на 2; на 3; на 4; на 9; на 12.

Задача 10. Верно ли, что любое натуральное число, все цифры в записи которого одинаковые, делится на 11? Верно ли обратное утверждение?

Задача 11. Верно ли, что любое целое число, делящееся на 6 и на 9, делится на 54? Верно ли обратное утверждение?

1.1.2 Логика: операции над высказываниями и таблицы истинности[1]

С высказываниями можно (и часто — нужно!) выполнять *логические операции* — примерно так же, как с числами можно выполнять арифметические операции (сложение, деление и так далее), а с многочленами и прочими алгебраическими выражениями — алгебраические операции (которые называются почти так же, как и арифметические).

Когда мы складываем два числа — мы получаем новое число, когда перемножаем два многочлена — получаем новый многочлен, а когда применяем логическую операцию к высказываниям — получаем новое высказывание.

? **Вопрос 9.** Какие ещё примеры *операций* вы знаете? Например, какие есть механизмы для превращения двух чисел в одно новое число, двух геометрических фигур в одну новую геометрическую фигуру, двух точек на плоскости — новую точку, двух предложений русского языка в одно новое предложение, или, допустим, двух баночек с красками гуаши в одну новую баночку?

На самом деле, мы уже пользовались операциями над высказываниями, не замечая этого.

? **Вопрос 10.** Какие у вас есть предположения, что называют «логическими операциями над высказываниями»? Допустим, есть два высказывания «Я люблю кататься» и «Я люблю саночки возить». Как к этим высказываниям применить какую-нибудь «операцию»?

$\odot$ **Определение 2.** Для любых двух высказываний A и B можно составить высказывания:[2]
«A **И** B», верное тогда и только тогда, когда верны *оба* утверждения A, B;
«A **ИЛИ** B», верное тогда и только тогда, когда верны *хотя бы одно из* утверждений A, B;
«**ЕСЛИ** A, **ТО** B» («$A \Rightarrow B$»), верное во всех случаях *кроме*: «A верно, а B неверно».

В определении 2 мы словами описали, в каких случаях истинно получившееся в результате применения операции высказывание. То же самое можно оформить в виде таблицы, которую иногда называют *таблицей истинности*. Начнём с примера.

$\rightarrow$ **Пример 7.** Даны высказывания A: «Маша пляшет», B: «Маша поёт». Применим к ним операцию «**И**», то есть рассмотрим высказывание A **И** B: «Маша пляшет и поёт».
Задание: составить таблицу истинности для трёх данных высказываний.

Решение. Ясно, что истинность третьего, составного, высказывания («Маша пляшет и поёт») зависит от того, пляшет ли Маша и поёт ли она, то есть от истинности первых двух высказываний. Каждое из них может быть либо истинным, либо ложным (Маша может петь или не петь, плясать или не плясать). Запишем каждый случай в отдельную строку таблицы:

«Маша пляшет»	«Маша поёт»	«Маша пляшет и поёт»
неверно	неверно	неверно
неверно	верно!	неверно
верно!	неверно	неверно
верно!	верно!	верно!

A	B	A **И** B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Всего получилось 4 случая. При этом третий столбец таблицы мы заполняли в соответствии с определением операции «И» (см. определение 2).

Ту же самую таблицу в логике часто записывают более кратко, см. таблицу справа. Высказывания здесь заменены своими названиями (A, B и т.д.), а слова «верно» и «неверно» — цифрами 1 и 0 соответственно.

Ответ. См. таблицы выше.

[1] По этой теме можно прочитать интересную статью «Логика логики» в журнале «Квантик» [8].

[2] Для этих логических операций есть специальные названия (*конъюнкция*, *дизъюнкция*, *импликация*), которые нам сейчас изучать совершенно необязательно.

Построим теперь таблицы истинности для операций «**ИЛИ**» и «**ЕСЛИ, ТО**».

A	B	A **ИЛИ** B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Замечание 2. «Или» в русском языке имеет двойной смысл. Иногда оно бывает исключительным, близким к конструкции «либо, либо», иногда — неисключительным, включающим вариант «и то, и другое». Мы, в соответствии с определением 2 и таблицей справа, будем считать, что «или» по умолчанию неисключительное. Например, фраза «Я куплю кефир или ряженку» будет истинна в том числе и тогда, когда человек купит и то, и другое. Однако в каждой конкретной ситуации лучше по возможности уточнять этот момент.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Замечание 3. В соответствии с определением 2 и таблицей справа, «из лжи следует истина». То есть, например, высказывание «*если автор этого текста — крокодил, то читатель ежедневно посещает зоопарк*» — истинно. Вне зависимости от привычных мест прогулки читателя. Уже только потому, что автор этого текста — не крокодил.

Очень может быть, что вам эта новость покажется странной. Это нормально, автора текста в детстве этот факт тоже очень удивлял. Во-первых, можете пока просто выучить определение и таблицу истинности для операции следствия и считать их небольшой причудой математической логики. Во-вторых, прочитайте следующее объяснение.

К высказываниям вида «ЕСЛИ, ТО» можно относиться как к некоторым правилам, вроде теорем или законов. И говорить о том, что теорема неверна, если в какой-то ситуации вывод, заявленный в теореме, сделать нельзя.

Чтобы сказать, что утверждение «если автор этого текста — крокодил, то читатель ежедневно посещает зоопарк» неверно, надо его опровергнуть. Как это сделать? Привести контрпример. Что было бы контрпримером, то есть что могло бы нарушить написанное правило (закон)? Ситуация, в которой это правило не выполняется. По сути, утверждение говорит нам: во всех ситуациях, когда автор текста — крокодил, читатель посещает зоопарк. Чтобы его опровергнуть, нужно привести пример ситуации, когда автор текста — крокодил, а читатель ежедневных посещений зоопарка не осуществляет.

Задача 12. Составьте таблицу истинности (как в примере 7) для трёх высказываний:

- «ты вошёл в троллейбус»;
- «ты оплачиваешь проезд»;
- «если ты вошёл в троллейбус, то ты оплачиваешь проезд».

Как вам кажется, соответствует ли эта таблица принятому порядку проезда в общественном транспорте?

⊙ **Определение 3.** Высказывание «Либо A, либо B» считается верным тогда и только тогда, когда верно ровно одно из высказываний A и B.

Задача 13. Составьте таблицу истинности (как в примере 7) для трёх высказываний:

- «десерт вкусный»;
- «десерт полезный»;
- «десерт либо вкусный, либо полезный».

Как вам кажется, для каждой ли из строк получившейся таблицы бывает десерт, которой ей соответствует?

Задача 14*. Составьте таблицу истинности для четырёх утверждений:

«Я ем», «Я глух», «Я нем», «Если я ем, то я глух и нем».

Сколько строк получилось в таблице? Если не секрет, ответьте, какие из строк чаще соответствуют лично вашему состоянию?

1.1.3 Логика: построение отрицаний

В школе появилось объявление: «Неверно, что директор категорически возражает против отмены решения о запрете контроля за прическами». Может ли теперь Мальвина покрасить волосы в сиреневый цвет без риска получить выговор?

По этой теме можно использовать первые два занятия из книги [7]. Там обсуждается больше нюансов, чем в нашем кратком тексте, и приводятся красочные примеры.

Определение 4. Два утверждения называют *противоположными*, если в любом случае верно ровно одно из них. Утверждение, противоположное данному, называют *отрицанием* данного утверждения. Итак,
1) утверждение и его отрицание не могут быть оба верны;
2) утверждение и его отрицание не могут быть оба неверны.

Замечание 4. Отрицание можно тоже рассматривать как логическую операцию над высказыванием, см. таблицу истинности справа. Просто это «унарная» операция, то есть применяемая к *одному* объекту — как, например, операция замены числа на противоположное ему число или операция возведения многочлена в квадрат (в отличие от «бинарных» операций, применяемых к *двум* объектам, как умножение или сложение). Говорят даже «примените отрицание к данному высказыванию».

A	**НЕ** A
0	1
1	0

Отрицание к утверждению вида «дела обстоят так-то» проще всего сформулировать так: «неверно, что дела обстоят так-то». Однако такая формулировка бывает недостаточно прозрачной, см. эпиграф выше.

Полезно научиться выбирать удобные формулировки отрицаний к утверждениям.

Пример 8. У Чебурашки на полке лежит много перчаток. Каждое утро Чебурашка очень торопится в школу и наугад берёт с полки две перчатки. Он заметил, что обе перчатки — левые примерно в 25% случаев.
а) Крокодил Гена думает, что тогда в оставшихся 75% случаев обе перчатки — правые. Прав ли Крокодил?
б) Сформулируйте отрицание к утверждению: «обе перчатки — левые».
в) Чебурашка думает, что «если он вернётся домой, чтобы поменять перчатки, то обязательно опоздает в школу». Сформулируйте отрицание.

Ответ. **а)** Нет, ещё можно вытащить левую и правую перчатки.
б) «хотя бы одна из перчаток — правая».
в) «может случиться, что Чебурашка вернётся домой поменять перчатки и придёт в школу вовремя.»

Замечание 5. Если утверждению A соответствует некоторое множество исходов эксперимента, то отрицанию к A по определению соответствует дополнение к этому множеству (т.е. множество всех исходов, при которых утверждение не выполняется). В нашем опыте по вытягиванию перчаток в пунктах **а** и **б** три исхода, один из них (ЛЛ) соответствует утверждению, а два других (ЛП, ПП) — отрицанию. В пункте **в** можно рассмотреть три исхода: вернётся и опоздает, вернётся и не опоздает, не вернётся. Данному утверждению соответствуют первый и последний исход, а отрицанию — только второй.

Задача 15. Составьте таблицу истинности для четырёх высказываний: «1-я перчатка левая», «2-я перчатка левая», «обе перчатки левые», «хотя бы одна из перчаток — правая». Как связаны между собой два последние столбца таблицы?

Задача 16. [7, 1.3] Какое из утверждений — отрицание к утверждению «Я встретил вас»:
а) «Не я встретил вас». **б)** «Я не встретил вас». **в)** «Я встретил не вас».

Замечание 6. Существуют простые формальные правила, позволяющие строить отрицания к составным утверждениям типа «иногда верно A», «верно A и B», «верно A или B», «если A, то B», и т.д. Однако мы не рекомендуем, особенно на первых порах, увлекаться выучиванием правил логики наизусть. Полезнее разбираться в каждой ситуации заново.

Пример 9. Постройте отрицания, обойдясь без «неверно, что».
а) Вы сможете добраться до города на электричке или на автобусе.
б) Сегодня в школу опоздали Олег и Катя.
в) Некоторые коты умеют разговаривать.
г) В любой треугольник можно вписать квадрат так, что одна из сторон квадрата и все его вершины лежат на сторонах треугольника.

Решение. **а)** Какие возможны варианты в этой ситуации? Может быть, до города можно добраться и на электричке, и на автобусе. Может быть, ни то, ни другое не ходит. Может быть, доступны только электрички, а может — только автобусы. В каких из этих четырёх случаев утверждение «Вы сможете добраться до города на электричке или на автобусе» верно? Во всех, кроме второго: если ни то, ни другое не работает, добраться будет нельзя.
Ответ. «Вы не сможете добраться до города ни на автобусе, ни на электричке».
б) Каждый из двоих ребят мог либо опоздать, либо не опоздать в школу. Всего четыре случая: оба опоздали, оба пришли вовремя, опоздал только Олег и опоздала только Катя. Наше утверждение говорит, что имеет место первый случай: оба опоздали. Если это неверно, то возможны три оставшихся случая. Их можно охватить одним высказыванием «Сегодня хотя бы один из двоих ребят, Олега и Кати, пришёл в школу вовремя». А можно сказать короче: «Сегодня Олег или Катя пришли в школу вовремя». (В соответствии с замечанием 2, эту утверждение истинно и в случае, если оба пришли вовремя.)
Ответ. «Сегодня Олег или Катя пришли в школу вовремя.»
в) Каждый кот либо умеет разговаривать, либо не умеет. Утверждается, что бывают коты, которые умеют разговаривать. Если это неверно, то таких котов нет.
Ответ. «Ни один кот не умеет разговаривать».
г) В каждый треугольник либо можно вписать квадрат указанным способом, либо нельзя. (Нам сейчас даже неважно, какой это именно способ!) Утверждается, что это можно сделать с любым треугольником (то есть со всеми треугольниками).
Ответ. «Существует хотя бы один треугольник, в который нельзя вписать квадрат так, что одна из сторон квадрата и все его вершины лежат на сторонах треугольника.»

Пример 10. Постройте отрицания, обойдясь без «не», «нет» и «неверно».
а) На планете существует хотя бы одна гора выше 10000 м над уровнем моря.
б) Сумма двух двузначных чисел всегда является двузначным числом.
в) Если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и число делится на 27.
г) Если все точки прямой покрасить в два цвета, то найдётся отрезок, концы и середина которого покрашены в один и тот же цвет.

Ответ. **а)** Высота каждой горы на планете меньше или равна 10000 м над уровнем моря.
б) Существуют два двузначных числа, сумма которых содержит в десятичной записи или одну цифру, или хотя бы три.
в) Существует натуральное число с суммой цифр, делящейся на 27, которое даёт при делении на 27 положительный остаток.
г) Можно покрасить все точки прямой в два цвета так, что середина каждого отрезка с одноцветными концами покрашена в другой цвет, чем концы.

Замечание 7. В ответах выше были предприняты усилия, чтобы полностью избежать частицы «не». Это может показаться искусственным. Иногда — будет лишним. Но иногда это поможет решить задачу — например, замены

– «не равно» на «либо больше, либо меньше»
– «не больше» на «меньше или равно»
– «не делится» на «имеет положительный остаток»

иногда позволяют лучше понять ситуацию.

Задача 17. Кандидат в президенты пообещал, что если его выберут, то к 2022 году у каждого австралийского гражданина старше 22 лет будет по дому. В каком случае получится, что он не сдержал обещание? Как тогда доказать это в суде?

Задача 18. Постройте отрицания, обойдясь без «не», «нет» и «неверно».
а) Аня выше Алёны.
б) Каждый библиотекарь любит читать книги.
в) Бывает виноград без косточек.
г) Гриша купил коньки и клюшку.
д) Даня мечтает научиться летать или плавать.
е) На Земле не существует говорящих ежей.
ж) Жизнь бесконечна.
з) Зимородки всегда строят гнёзда на земле.
и) Илья играет в футбол или в шахматы.
к) Кристиан умеет говорить по-польски и по-английски.
л) Люди всегда быстро привыкают к хорошему.

Задача 19. Постройте отрицания, обойдясь без «неверно, что».
а) Всё, что нас не убивает, делает нас сильнее.
б) В каждом уважающем себя магазине есть хотя бы 10 разновидностей зонтиков.
в) В каждом приличном заведении есть хотя бы 12 стульев, на которых можно со вкусом посидеть.
г) Если ты долго смотришь в бездну, то бездна тоже смотрит в тебя.
д) Кто не с нами, тот против нас.
е) Не всё то золото, что блестит.
ж) На нашем сайте вы можете узнать свежие новости и скачать смешные мемы.
з) Доместос убивает все известные виды микробов.
и) Каждое блюдо в этом заведении или пересолено, или не пересолено, но переперчено, или не пересолено и не переперчено, но подгорело.
к) Земля это диск, стоящий на трёх слонах, которые стоят на черепахе.
л) А вы, друзья, как ни садитесь, всё в музыканты не годитесь.

Задача 20. Постройте отрицания, обойдясь без «неверно, что».
а) Любое действительное число или чётно, или нечётно.
б) Основания высот любого остроугольного треугольника образуют остроугольный треугольник.
в) В любом остроугольном треугольнике есть угол, отличающийся от прямого не более чем на 15°, или есть два угла, отличающиеся между собой не более чем на 15°.
г) Если натуральное число чётно, больше 4 и меньше 1000, то оно представимо в виде суммы двух простых чисел.

Задача 21. Контрольную работу называют *лёгкой*, если на любой парте существует ученик, решивший её хотя бы наполовину, и к тому же не менее половины класса решило её полностью. Дайте определение *трудной* контрольной работы, обойдясь без частицы «не» и слова «нет».

Посмотрим, как построение отрицаний помогает решить задачу. Рассмотрим в качестве примера утверждение (в) из задачи 20.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 11.** Доказать, что в каждом остроугольном треугольнике какой-то угол отличается от $90°$ не более чем на $15°$, или есть два угла, разность между которыми не более $15°$.

Решение. Предположим, что данное утверждение неверно. Тогда верно противоположное утверждение. Сформулируем его: *существует хотя бы один такой остроугольный треугольник, в котором все углы отличаются от* $90°$ *больше, чем на* $15°$*, и все углы отличаются между собой больше, чем на* $15°$.

Выведем теперь из этого утверждения следствия. Во-первых, ясно, что мы можем рассмотреть какой-нибудь треугольник, который по нашему предположению существует. Рассмотрим его. Во-вторых, в нём каждый угол меньше $90° - 15° = 75°$.

$\boxed{\mathcal{M}}$ **Упорядочим** три угла треугольника по величине. Наибольший из них меньше $75°$. Средний по величине должен отличаться от него больше, чем на $15°$, то есть должен быть меньше $60°$. Следовательно, самый маленький угол меньше, чем $60° - 15° = 45°$. Тогда сумма всех трёх углов будет точно меньше, чем $45° + 60° + 75° = 180°$. Но это противоречит теореме о сумме углов треугольника! Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, и исходное утверждение истинно.

Задача 22. [7, 7.1] Дано: «Если рыцарь встречает дракона, то рыцарь вступает в бой.»
а) Составьте к этому высказыванию обратное, противоположное, противоположное обратному.[3]
б) Известно, что рыцарь вступил в бой. Означает ли это, что он встретил дракона?
в) Рыцарь не вступил в бой. Означает ли это, что он не встретил дракона?

Задача 23. **а)** Постройте отрицание к утверждению: «В классе найдутся 5 человек, родившиеся в один месяц или 5 человек, среди которых нет родившихся в один месяц».
б) Имеется 101 пуговица, каждая пуговица — какого-то одного цвета. Докажите, что среди этих пуговиц найдутся 11 пуговиц одного цвета или 11 пуговиц разных цветов.

Задача 24*. Каждый из голосующих на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии 10 кандидатов. На избирательном участке находится 11 урн. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит хотя бы один бюллетень и при всяком выборе 11 бюллетеней по одному из каждой урны найдётся кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

Задача 25*. На столе лежат пять карточек. На их верхних сторонах видны следующие надписи:

$$\boxed{23},\ \boxed{\text{сентября}},\ \boxed{2020},\ \boxed{\triangle},\boxed{\text{неверно}}.$$

Что на карточках с обратной стороны — неизвестно. Мы указываем на некоторые карточки, и их одновременно переворачивают. Какое наименьшее число карточек и какие именно надо перевернуть, чтобы проверить правило:
а) «Хотя бы на одной из этих пяти карточек нарисован треугольник».
б) «На каждой из этих пяти карточек написано какое-то число».
в) «Хотя бы на одной из этих пяти карточек нарисован круг».
г) «На каждой из пяти карточек есть слово или нет числа.»
д) «Если на одной стороне карточки написано чётное число, то на другой стороне написано название месяца».

[3]Вспомнить эти понятия помогут пример 2 и определение 4.

Задача 26*. На кружок пришло 60 учеников. Оказалось, что среди каждых десяти из них есть не меньше трёх одноклассников. Докажите, что среди кружковцев найдётся по меньшей мере 15 учеников, которые учатся в одном классе.

Задача 27. Рассмотрим высказывание «*Умный любит учиться, а дурак учить*». Будем считать, что имеется в виду утверждение «все умные любят учиться и все дураки любят учить». Постройте отрицание к этому высказыванию. Как вы считаете, что верно: исходное высказывание или отрицание к нему?

Задача 28. Как и в задаче 27, рассмотрим высказывание:

«все умные любят учиться и все дураки любят учить»

Какие из следующих высказываний следуют из этого высказывания?
а) Если человек умный, то он любит учиться.
б) Если человек умный, то он любит учить.
в) Если человек не любит учиться, то он не умный.
г) Если человек любит учиться, то он не дурак.
д) Все кто любит учить — дураки.
е) Если человек не любит учить, то он не дурак.
ж) Не бывает людей, которые любят и учить, и учиться.

Задача 29*. Составьте таблицу истинности для четырёх утверждений:

- «Все умные любят учиться»,
- «Все дураки любят учить»
- «Все умные любят учиться и все дураки любят учить»,
- «Если человек не любит учиться, то он не умный.»

Попробуйте по двум последним столбцам вашей таблицы сделать вывод об ответе на вопрос, поставленный в пункте (**в**) задачи 28.

Попробуйте проделать аналогичную процедуру с остальными пунктами.

Задача 30*. Попробуйте решить интересную задачу «Десять логиков в кафе» из журнала «Квантик», см. [9]. Решение можно найти в следующем номере журнала [10].

1.2 Многочлены

З Рекомендуем использовать из задачника [1] следующие упражнения на многочлены:
стр. 19–23 A1–A4, A7–A13, B4, B10, B14, C6, C9, C10, C11.

1.2.1 Без формул сокращённого умножения

Крайне важно уметь умножать многочлены обычным способом — раскрытием скобок, то есть используя распределительный закон умножения. Именно таким способом и получаются *формулы сокращённого умножения* — частные случаи произведения многочленов, в которых подобные слагаемые удачным образом взаимно сочетаются или уничтожаются.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 12.** Найдите значение выражения

$$2x(x-2y)^2 - 2(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$$

при $x = -\frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$.

Решение. **Способ 1.** 0) Заметим, что перед нами разность двух выражений.

1) Упростим сначала первое из них
$2x(x-2y)^2 = 2x(x-2y)(x-2y) = 2x(x^2 - x\cdot 2y - 2y\cdot x + 2y\cdot 2y) = 2x(x^2-4xy+4y^2) = 2x^3 - 8x^2y + 8xy^2$.

2) Теперь упростим второе выражение (вычитаемое):
$2(x-2y)(x^2+2xy+4y^2) = 2(x^3+2x^2y+4xy^2-2yx^2-4xy^2-8y^3) = 2(x^3-8y^3) = 2x^3-16y^3$.

3) Осталось вычитание, **выполним его аккуратно**:
$(2x^3-8x^2y+8xy^2)-(2x^3-16y^3) = 2x^3-8x^2y+8xy^2-2x^3+16y^3 = -8x^2y+8xy^2+16y^3$.

4) Нам нужно подставить $x = -\frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$ в выражение $-8x^2y+8xy^2+16y^3$.
4.1) $-8x^2y = -8\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3} = -\frac{64}{27}$
4.2) $8xy^2 = 8\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{64}{27}$
4.3) $16y^3 = \frac{16\cdot 8}{27} = \frac{128}{27}$
4.4) Складываем: $-\frac{64}{27} - \frac{64}{27} + \frac{128}{27} = \frac{-64-64+128}{27} = 0$.

$\boxed{?}$ **Вопрос 11.** Как можно было выполнить шаг (4) хитрее, без действий (4.1–4.4)?

Способ 2. 1) Заметим, что выражения $2x(x-2y)^2$ и $2(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ содержат общий множитель $x-2y$. Вынесем его за скобку:

$$(x-2y)\big(2x(x-2y)-2(x^2+2xy+4y^2)\big) = (x-2y)(2x^2-4xy-2x^2-4xy-8y^2) =$$
$$= (x-2y)(-8xy-8y^2) = (x-2y)\cdot(-8y)\cdot(x+y).$$

2) Итак, нужно подставить $x = -\frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$ в выражение $(x-2y)\cdot(-8y)\cdot(x+y)$. Заметим, что данные значения x и y отличаются только знаком, поэтому $(x+y) = 0$, откуда сразу получаем ответ.
Ответ. 0.

$\boxed{?}$ **Вопрос 12.** Не нужно ли в способе 2 вычислить значения скобок $(x-2y)$ и $(-8y)$?

$\boxed{?}$ **Вопрос 13.** Какой из двух способов решения примера 12 вам больше нравится?

$\boxed{?}$ **Вопрос 14.** Какие места в решении примера 12 кажутся вам наиболее трудными для понимания? А наиболее опасными с точки зрения возможности ошибиться?

$\boxed{?}$ **Вопрос 15.** Какие ещё способы решения примера 12 вы можете предложить?

Задача 31. Представьте выражение в виде многочлена стандартного вида, *используя распределительный закон умножения.*

а) $(2x-7)(8-3x)$;
б) $(3x-10y)(10x+3y)$;
в) $(2v-3)(2v+3)$;
г) $(3b+c)(3b+c)$;
д) $(7+8d)(8d-7)$;
е) $10x^2-2x(5x+4)$;
ж) $16a^2-(4a-1)(4a-1)$;
з) $4z(2z+7)-(2z+7)(2z+7)$;
и) $6x(3x-4y)-(3x-4y)(3x+4y)$;
к) $x^3-(2+x)(4-2x+x^2)$.

Задача 32. Вычислите значение выражения наиболее удобным способом.

В каких пунктах выгоднее раскрыть скобки, а в каких — сначала вычислить значения в скобках, а затем перемножить получившиеся числа?

а) $(13{,}7-3{,}7)(13{,}7+3{,}7)$;
б) $(200-1)(200+1)$;
в) $(400-1)(100-1)$;
г) $(50-1)(50-1)$;
д) $(2019-19)(2019-19)(2019-19)$;
е) $(40+0{,}5)(40+0{,}5)$;
ж) $(19{,}81-20{,}19)(20{,}19+19{,}81)$;
з) $(12000-40)(300+1)$;
и) $(40-0{,}6)(100+1{,}5)$;
к) $(10-1)(100+10+1)$;
л) $(30-1)(900+30+1)$;
м) $(2+1)(32-16+8-4+2-1)$.

Задача 33. Заполните многоточие в выражении $(x-8)(x\ldots)$ так, чтобы после приведения к стандартному виду произведение содержало **а)** 4 одночлена; **б)** 3 одночлена; **в)** Можно ли добиться, чтобы получилось 5 одночленов? **г)** а 2 одночлена?

Задача 34. Заполните многоточие в выражении $(2a+6b)(a\ldots)$ так, чтобы после приведения к стандартному виду произведение содержало **а)** 4 одночлена; **б)** 3 одночлена; **в)** Можно ли добиться, чтобы получилось 5 одночленов? **г)** а 2 одночлена?

Задача 35. Заполните многоточие в выражении $(b\ldots)(1+b+b^2)$ так, чтобы после приведения к стандартному виду произведение содержало **а)** 4 одночлена; **б)** 6 одночленов; **в)** Можно ли добиться, чтобы получилось 5 одночленов? **г)** а 3 одночлена? **д)** а два?

Замечание 8. В предыдущих трёх задачах в некоторых пунктах вам могло захотеться поставить вместо многоточия одночлен, подобный уже стоящему в этой скобке (например, сделать $(x+2x)$). Также у вас мог возникнуть вопрос, можно ли заменить многоточие на «пустоту», например, сделать $b(1+b+b^2)$. Всё это условием задачи не запрещено и здорово, если вы догадались. Однако ещё интереснее решить эти задачи при условии, что внутри скобок стоит *многочлен стандартного вида, содержащий хотя бы два одночлена.*

Задача 36*. [3, $\boxed{119}$] Может ли при перемножении двух многочленов получиться многочлен, в котором меньше одночленов, чем в каждом из сомножителей?

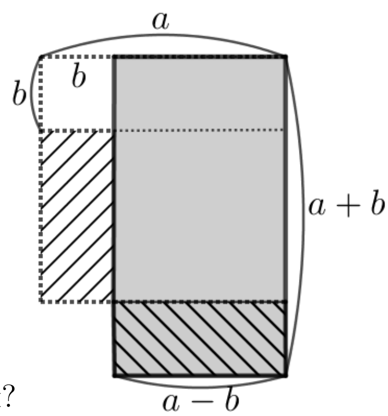
1.2.2 Формулы: доказываем и применяем

Задача 37. Заполните пробелы в списке формул ниже.

Квадрат суммы	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
	$(a-b)^2$	
Разность квадратов	a^2-b^2	$(\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots)$
Куб суммы		$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
	$(a-b)^3$	
		$(x-y)(x^2+xy+y^2)$
Сумма кубов	x^3+y^3	$(\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

?

Вопрос 16. Какие из пунктов задач 31 и 32 являются частными случаями формул сокращённого умножения, а в каких пунктах формулы могут помочь? Какие именно формулы?



Задача 38. Докажите какие-нибудь из формул сокращённого умножения геометрически.

Подсказка. Например, попробуйте понять, какую из формул иллюстрирует картинка справа.

Задача 39. 1 апреля собрались a мальчиков и b девочек. Каждый собравшийся сделал одну свою фотографию и по одной фотографии каждого из остальных.

а) Чего было больше: фотографий девочек, сделанных мальчиками, или фотографий мальчиков, сделанных девочками?

б) Сколько всего фотографий было сделано? При чём здесь наша тема?

Задача 40. Упростите выражение и найдите его значение при данных значениях переменных

а) $(a-2)^2+(a-1)^2+a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$ при $a=20$;

б) $(3b-5)(3b+5)+(b-5)^2$ при $b=-0{,}9$;

в) $(v+15)^2-(v-15)^2$ при $v=1\frac{2}{3}$;

г) $(g-8)^2+(3g+4)^2$ при $g=0{,}5$;

д) $(3x-7y)(3x+7y)-(7x+3y)(7x-3y)$ при $x=2{,}5$; $\quad y=-2$;

е) $(a+b)^3-(a-b)^3-2b^3$ при $a=-\frac{1}{3}$; $\quad b=9$;

ж) $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$ при $x=-\frac{1}{2}$;

з) [3, $\boxed{91}$] $(a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)$ при $a=\frac{1}{3}$; $\quad b=3$.

?

Вопрос 17. Ясно, что при перемножении многочленов формулы сокращённого умножения бывают полезны, но можно обойтись и без них, «честно» всё перемножив и аккуратно приведя подобные слагаемые. По-настоящему важно помнить формулы сокращённого умножения при решении некоторых других задач. Как вы думаете, каких?

Задача 41*. **а)** Как без алгебры сформулировать, что требуется найти в 40(а)?

б) Какой факт про делимость целых чисел следует из тождества, полученного в 40(а)?

в) Придумайте аналогичные факты и подумайте, как их можно обобщить.

Задача 42*. Известно, что $a+\dfrac{1}{a}=5$. Найдите **а)** $a^2+\dfrac{1}{a^2}$; **б)** $a^3+\dfrac{1}{a^3}$.

в) Можете ли вы описать алгоритм, как найти $a^{2020}+\dfrac{1}{a^{2020}}$?

1.2.3 Разложение на множители

Задача 43. Разложите на множители

а) $x^2 - 36$;
б) $14x^6 - 35x^3y$;
в) $50v^3 - 128v$;
г) $x^2 - x + 0{,}25$;
д) $3a^2b^2 + 3c^2 + 6abc$;
е) $210z - 45z^2 - 245$;
ж) $1{,}6a^2b^2 - 14{,}4b^2c^2$;
з) $4x^2 + 20xy + 25y^2$;
и) $4x^2 + 20xy + 25y^2 - z^2$;
к*) $4x^2 + 20xy + 21y^2$;
л) $64 + z^3$;
м) $8a^3 - 1$;
н) $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$;
о) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8 - b^3$;
п*) $a^3 + 6a^2 + 12a - 19$;

$\boxed{?}$ **Вопрос 18.** Что проще, на ваш взгляд: перемножать многочлены или раскладывать их на множители?

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 13.** Решите уравнение: $2x^5 + 40x^2 = 10x^4 + 8x^3$.

Решение. Перенесём все члены в левую часть и выполним разложение на множители:

$$2x^5 + 40x^2 = 10x^4 + 8x^3 \Leftrightarrow$$
$$2x^5 - 10x^4 - 8x^3 + 40x^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x^2(x^3 - 5x^2 - 4x + 20) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x^2[(x^3 - 5x^2) - (4x - 20)] = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x^2[x^2(x - 5) - 4(x - 5)] = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x^2(x^2 - 4)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x^2(x - 2)(x + 2)(x - 5) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю хотя бы один из сомножителей. У нас 4 варианта: $2x^2 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$ или $x - 5 = 0$, откуда получаем ответ.

Ответ. 0; 2; -2; 5.

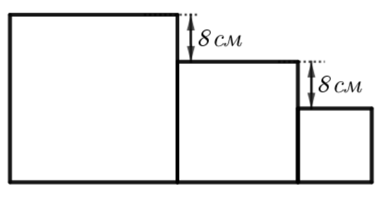
$\boxed{?}$ **Вопрос 19.** Какие формулы сокращённого умножения помогли решить пример 13?

$\boxed{?}$ **Вопрос 20.** Какие методы разложения на множители помогли решить пример 13?

Задача 44. Решите уравнение:

а) $18x^2 = 54x$;
б) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
в) $7x^3 = 63x$;
г) $5x^3 + 75x = 0$;
д) $3x^3 - 6x^2 + 48x = 96$;
е) $2x^5 + x^4 = 18x + 9$.

Задача 45. «Лесенка» на рисунке справа состоит из трёх квадратных «ступеней», причём высота средней «ступеньки» на 8 см отличается как от высоты большей, так и от высоты меньшей. Известно, что площади меньшего и большего квадратов отличаются на 352 см^2. Найдите площадь среднего квадрата. *Примечание. На рисунке пропорции не соблюдены.*



Задача 46*. Докажите, что любое нечётное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

Задача 47*. [4, 6.87] Пусть a, b, c — попарно различные числа. Докажите, что выражение $a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$ не равно нулю.

1.2.4 *Разложение на множители: случай посложнее

Замечание 9. Задача разложения многочлена на множители — трудная (иногда — нерешаемая). Школьникам обычно предлагаются *специально подобранные* случаи, где разложение можно найти тем или иным известным методом, или угадать.

Задача 48*. Перемножьте два многочлена и предложите другу разложить результат на множители. Другой вариант: спрячьте листок с сомножителями и попробуйте через несколько дней сами их восстановить. Постарайтесь таким образом придумать сложную задачу.

$\boxed{\star \to}$ **Пример 14*.** Решите уравнение $5x^4 + 30x = 35x^2$.

Решение. Способ 1. 1) Перенесём все одночлены в левую часть: $5x^4 + 30x - 35x^2 = 0$.
2) Вынесем за скобки общий множитель: $5x(x^3 + 6 - 7x) = 0$.
3) Попробуем разложить $x^3 + 6 - 7x$ **методом группировки**. Если многочлен равен произведению двух скобок, то в каждой скобке хотя бы 2 одночлена, при перемножении будет хотя бы 4 одночлена. У нас всего 3 слагаемых — значит, какие-то слагаемые были подобными. Попробуем сделать обратную операцию: *расщепление слагаемого*. Например:
(а) $x^3 + 6 - 7x = x^3 + 2 + 4 - 7x$, или
(б) $x^3 + 6 - 7x = x^3 + 6 - 3x - 4x$, или
(в) $x^3 + 6 - 7x = x^3 + 6 - 6x - x$, или
(г) $x^3 + 6 - 7x = 2x^3 - x^3 + 6 - 7x$, и т.д.

$\boxed{\mathcal{M}}$

Однако не во всех из этих случаев можно применить метод группировки. Мы используем удачный вариант (в):
$x^3+6-7x = x^3+6-6x-x = (x^3-x)+(6-6x) = x(x^2-1)+6(1-x) = x(x+1)(x-1)-6(x-1) = (x-1)(x(x+1)-6) = (x-1)(x^2+x-6)$.

$\boxed{?}$ **Вопрос 21.** Какие ещё из перечисленных выше случаев (а,б,г) расщепления слагаемого позволяют применить метод группировки?

4) Нужно попробовать разложить многочлен $x^2 + x - 6$. Постараемся угадать:

$$x^2 + x - 6 = (x\ldots\ldots)(x\ldots\ldots)$$

Как получить свободный член -6? Можно так: $-6 = (-1)\cdot 6 = -2\cdot 3 = -3\cdot 2 = -6\cdot 1$. Попробуем первый вариант: $(x-1)(x+6) = x^2 - x + 6x - 6$ не подходит, попробуем второй: $(x-2)(x+3) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$ — ура, сходится!

$\boxed{?}$ **Вопрос 22.** Как можно сразу выбрать верный вариант разложения -6 на множители?

5) Итак, $5x^4 + 30x = 35x^2 \Leftrightarrow 5x(x-1)(x-2)(x+3) = 0$. Произведение нескольких сомножителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. У нас 4 варианта: $x = 0$ или $x - 1 = 0$ или $x - 2 = 0$ или $x + 3 = 0$, откуда получаем ответ.

Способ 2. $5x^4+30x = 35x^2 \Leftrightarrow 5x^4+30x-35x^2 = 0 \Leftrightarrow 5(x^4+6x-7x^2) = 0 \Leftrightarrow x^4-7x^2+6x = 0$.

$\boxed{\mathcal{M}}$ Применим метод **выделения полного квадрата**. $x^4-7x^2+6x = x^4-6x^2-x^2+6x = x^4-6x^2+9-9-x^2+6x = (x^4-6x^2+9)-(x^2-6x+9) = (x^2-3)^2-(x-3)^2 = ((x^2-3)-(x-3))(x^2-3+x-3) = \ldots$

Ответ. 0; 1; 2; -3.

$\boxed{?}$ **Вопрос 23.** Если довести разложение до конца, будет ли оно таким же, как в способе 1?

$\boxed{?}$ **Вопрос 24.** Какие формулы сокращённого умножения использованы в способе 2? Где?

Задача 49*. Представьте многочлен x^4-7x^2+6x в виде разности квадратов другим способом (не таким, как в способе 2 в решении примера 14).

Задача 50. Решите уравнения:
а) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$; **б)** $3x^6 + 192 = 48x^3$; **в)** $9x^4 = 7x^2 + 2x$.

Задача 51*. [3, $\boxed{138}$] Разложите на два сомножителя многочлен $x^5 + x + 1$.

1.3 Линейные уравнения

В стандартном виде линейное уравнение имеет совсем короткий вид:

$$ax = b,$$

где x — неизвестное, a и b — данные числа. За этой записью скрывается простой вопрос:

? **Вопрос 25.** На какое число надо умножить число a, чтобы получить число b?

Например, на какое число нужно умножить 14, чтобы получить 7? Не слишком сложно, хоть числа бывают и похуже. Но ведь ещё немало усилий уходит на то, чтобы привести линейное уравнение к стандартному виду, а также на то, чтобы составить правильное уравнение по условию задачи. Поэтому приходится тренироваться.

А ещё линейное уравнение может не иметь или иметь бесконечно много корней.

? **Вопрос 26.** При каких значениях параметров a и b ответом на предыдущий вопрос будет 1) «такого числа нет»? 2) «на любое число»?

З

Рекомендуем использовать из задачника [1] упражнения на линейные уравнения и текстовые задачи, решаемые с их помощью:
стр. 36 A1–A6, A8, **стр. 138–140**: A3, A4, A8, B3, B4, **стр. 146–150** A5, A6, B1, B3, B7, C1. Правда, чтобы свести последние задачи в списке выше к линейному уравнению, потребуется сначала ввести две переменные, одна из которых впоследствии исчезнет.
стр. 159 C5, C6.

Задача 52. Решите уравнения:

а) $3x = 111$;

б) $12x = -132$;

в) $-8x = -2$;

г) $24x = 3$;

д) $32(x - 44) = 64(5 - x)$;

е) $88(2x + 11) = 132(x - 9)$;

ж) $5x - 2(x + 8) = 5$;

з) $(x - 5)(x + 5) - (x + 1)(x + 2) = 0$;

и) $\dfrac{x+7}{2} = \dfrac{x-2}{7}$;

к) $\dfrac{2x-1}{2} - \dfrac{2x-3}{3} = 1$;

л) $0{,}21x - 0{,}7(0{,}13x - 0{,}5) = 0{,}42$;

м) $(0{,}2x - 0{,}1)(0{,}5x - 5) - 0{,}25x(0{,}4x + 0{,}2) = 12{,}6$.

Задача 53. При каких значениях переменной x выполнены следующие равенства:

а) $x + 15 = x + 30$;

б) $6(3x - 0{,}5) = 18x - 3$;

в) $\dfrac{x+8}{8} = x + 1$;

г) $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{x-19}{6}$;

д) $x - (x + 4) = 4$;

е) $(x - 1)(x + 2) - (x - 2)(x + 3) = 4$;

ж) $\dfrac{6x+3}{3} = \dfrac{4x+4}{2}$;

з) $\dfrac{14x-3}{7} - \dfrac{9x+1}{6} = \dfrac{21x-25}{42}$.

Задача 54*. Какие из следующих утверждений верны? Обоснуйте свой ответ.

Λ

а) Чтобы уравнение имело корень $x = 5$, достаточно, чтобы это было уравнение $0{,}2x = 1$.
б) Чтобы уравнение имело корень $x = 5$, необходимо, чтобы это было уравнение $0{,}2x = 1$.
в) Чтобы уравнение вида $kx = b$ имело хотя бы один корень, необходимо, чтобы $k \neq 0$.
г) Чтобы уравнение вида $kx = b$ имело хотя бы один корень, достаточно, чтобы $k \neq 0$.
д) Чтобы уравнение имело ровно два корня, необходимо, чтобы оно не было линейным.
е) Чтобы уравнение имело ровно два корня, достаточно, чтобы оно не было линейным.
ж) Чтобы уравнение имело ровно один корень, необходимо, чтобы оно было линейным.
з) Чтобы уравнение имело ровно один корень, достаточно, чтобы оно было линейным.

1.4 График линейной функции

⊙ **Определение 5.** Функция, заданная уравнением вида $f(x) = kx + b$, называется *линейной.* Параметр k называется *угловым коэффициентом* линейной функции, а параметр b — *свободным членом.* Если $b = 0$, то функция является *прямой пропорциональностью.*

T **Теорема.** Графиком линейной функции является прямая.

T **Теорема** (*Основное свойство линейной функции*). Приращение линейной функции пропорционально приращению аргумента, то есть отношение $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ не зависит от выбора значений x_1 и x_2.

Замечание 10. Иными словами, скорость изменения линейной функции постоянна. По абсолютной величине она равна угловому коэффициенту, а его знак определяет, будет ли функция возрастать или убывать.

? **Вопрос 27.** Как доказать основное свойство линейной функции?

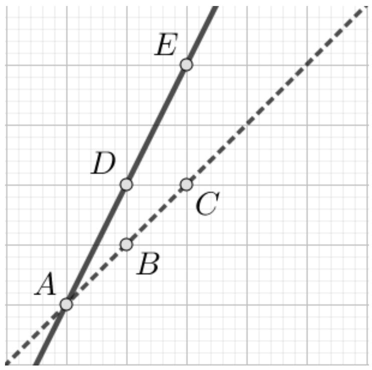
? **Вопрос 28.** Как доказать, что если приращение функции пропорционально приращению аргумента, то эта функция — линейная?

Задача 55. Вероника решила заняться оригами и купила альбом из 24 листов. Каждый день Вероника вырывает из альбома 2 листа и собирает из них одну бумажную модель оригами.
а) Нарисуйте в одной системе координат графики изменения числа листов в альбоме (ℓ) и числа собранных фигурок оригами (f) в зависимости от пройденных дней (x).
б) Задайте формулой зависимости $\ell(x)$ и $f(x)$ из предыдущего пункта.
в) с какой скоростью меняется число листов в альбоме?
г) каков угловой коэффициент функции $\ell(x)$?
д) с какой скоростью меняется число фигурок оригами?
е) каков угловой коэффициент функции $f(x)$?
ж) сколько листов было в альбоме изначально?
з) каков свободный член функции $\ell(x)$?
и) сколько собранных фигурок было изначально?
к) каков свободный член функции $f(x)$?
л) в какой момент число фигурок станет равно числу оставшихся в альбоме листов?
м) какова абсцисса точки пересечения графиков функций ℓ и f?

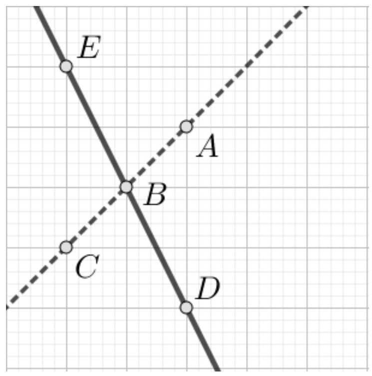
З Рекомендуем использовать из задачника [1] следующие упражнения на линейные и кусочно-линейные функции: **стр. 179** В10; **стр. 182** С4; **стр. 191–192** В1–В3, В9.

Задача 56. Ниже изображены графики указанных функций, а оси координат стёрты. Восстановите оси и найдите координаты A, B, C, D, E, если сторона большой клетки равна 1.

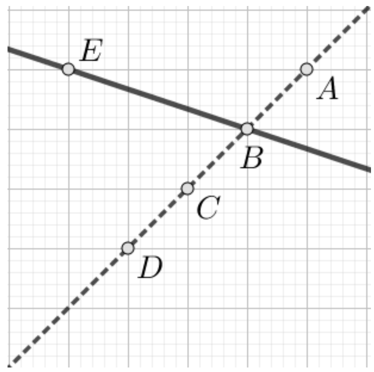
а) $f(x) = x$ и $g(x) = 2x + 1$



б) $f(x) = x$ и $g(x) = -2x - 3$



в) $f(x) = x - 3$ и $g(x) = 1 - x/3$



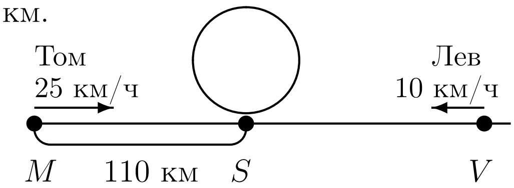
1.5 Системы линейных уравнений

Определение 6. *Системой уравнений* называют несколько уравнений, которые должны быть выполнены одновременно для одних и тех же значений переменных.

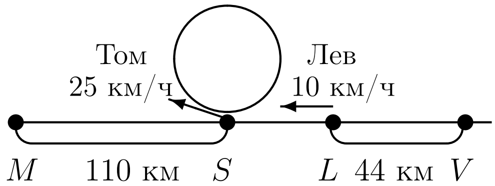
Вопросы 29. Важно уметь отвечать на следующие основные вопросы:
а) что называют *решением системы уравнений*? Как проверить найденное решение?
б) как система уравнений может быть связана с текстовой задачей?
в) в чём состоит метод сложения?
г) в чём состоит метод подстановки?
д) как получают графическую интерпретацию системы линейных уравнений с двумя переменными?
е) может ли система линейных уравнений не иметь решений?
ж) может ли система линейных уравнений иметь несколько решений?

Замечание 11. Ниже мы рассмотрим довольно громоздкий пример. Более простые примеры можно найти в материалах для 7 класса `https://drive.google.com/file/d/11KwI5sr_A0NbwI6M39GTOyvqye6VHN2t/view`.

Пример 15. На прямой дороге расположены пункты V и M, а между ними — пункт S, на расстоянии 110 км от пункта V. Лев на велосипеде и Том на мотороллере выехали в 9 утра в пункт S: Лев из пункта V со скоростью 10 км/ч, Том из пункта M в пункт S со скоростью 25 км/ч. В пункте S находится старт круговой трассы. Том, приехав к старту, сразу проехал два круга и тут как раз встретил в пункте S Льва, только что приехавшего из пункта V. После этого Том отдыхал в пункте S, а Лев на следующий день проехал ещё три круга по трассе. Найдите длину круговой трассы и продолжительность путешествий каждого из ребят, если известно, что Лев за два дня проехал 120 км.



Решение. Способ 1. Сначала решим задачу арифметическим методом.
1) $110 : 25 = 22 : 5 = 4{,}4$ (ч) — потратил Том на отрезок MS;
2) $10 \cdot 4{,}4 = 44$ (км) — проехал за это время Лев;
3) $120 - 44 = 76$ (км) — осталось Льву за 2 дня;



Отметим точку L, в которой находится Лев, когда Том впервые приехал на старт S. До их встречи Тому осталось проехать 2 круга, а Льву — отрезок LS. Скорости ребят постоянны и нам известны, так что мы можем составить пропорцию:

4) $\dfrac{2\text{ круга}}{25} = \dfrac{LS}{10}$, откуда $LS = 0{,}8$ круга;

Итак, с одной стороны Льву из точки L до конца путешествия осталось проехать 76 км (см. 3), с другой, ему осталось 0,8 круга в 1-й день и 3 круга во 2-й, то есть всего 3,8 круга.
5) $76 : 3{,}8 = 20$ (км) — длина одного круга трассы;
6) $110 + 2 \cdot 20 = 150$ (км) — длина пути Тома;
7) $150 : 25 = 6$ (ч) — время в пути Тома;
8) $120 : 10 = 12$ (ч) — время в пути Льва.

Способ 2. Перейдём к алгебраическим методам. Составим систему уравнений. Пусть x ч — время, потраченное Томом, а y км — длина круга. Тогда Том с одной стороны проехал $25x$ км, с другой — 110 км до пункта S и ещё два круга по y км, итого $25x = 110 + 2y$. А Лев всего проехал 120 км, в том числе 3 круга по y км и путь SV, на который ушло как раз всё время путешествия Тома, то есть x часов. Итак, $10x + 3y = 120$. Составим систему и решим её сначала методом сложения:

$$\left\{\begin{aligned} 25x &= 110 + 2y \\ 10x + 3y &= 120 \end{aligned}\right. \left|\begin{aligned} &\cdot 2 \\ &\cdot(-5) \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 50x &= 220 + 4y \\ -50x - 15y &= -600 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 50x &= 220 + 4y \\ -15y &= 4y - 380 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

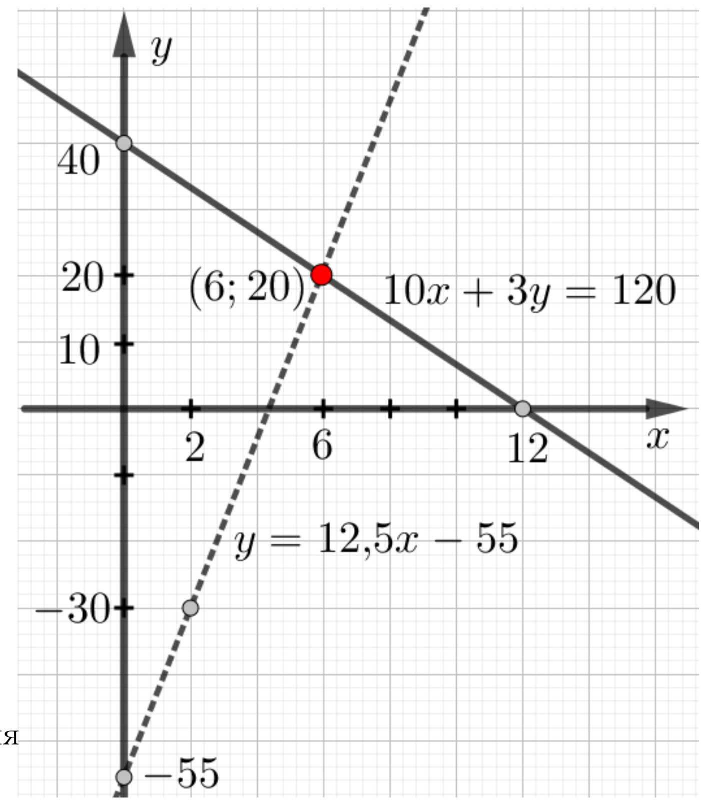
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 50x &= 220 + 4y \\ 380 &= 19y \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 50x &= 220 + 80 \\ y &= 20 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 6 \\ y &= 20 \end{aligned}\right.$$

Способ 3. Решим ту же систему методом подстановки.

$$\left\{\begin{aligned} 25x &= 110 + 2y \\ 10x + 3y &= 120 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y &= 12{,}5x - 55 \\ 10x + 3y &= 120 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y &= 12{,}5x - 55 \\ 10x + 3(12{,}5x - 55) &= 120 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y &= 12{,}5x - 55 \\ 47{,}5x &= 285 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y &= 12{,}5x - 55 \\ x &= 6 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 6 \\ y &= 20 \end{aligned}\right.$$

Способ 4. Наконец, рассмотрим графическую интерпретацию.



Пусть Том потратил x часов, а длина круга y км. Изобразим в прямоугольной системе координат Oxy точки, удовлетворяющие двум нашим условиям, то есть уравнениям, составленным выше. Поскольку значения расстояний и времени достаточно большие, выберем масштаб
по оси Oy: 5 км = 1 клетка,
по оси Ox: 2 ч = 1 клетка.

Условие на расстояние, пройденное Томом, запишем в виде $y = 12{,}5x - 55$. Этому уравнению удовлетворяют координаты точек, лежащих на прямой, проходящей через точки $(0; -55)$ и $(2; -30)$. Нарисуем её пунктиром.

Условие на расстояние, пройденное Львом, оставим в виде $10x + 3y = 120$. Множество подходящих точек — снова прямая, так как уравнение линейное. Здесь очень удобно найти точки пересечения с осями координат — это $(0; 40)$ и $(12; 0)$.

Проведя прямые, видим, что они пересекаются в узле нашей клетчатой сетке — точке с координатами $(6; 20)$. Это и есть единственная точка, которая удовлетворяет *обоим* условиям. Осталось записать ответ.

Ответ. 20 км, Том 6 ч, Лев 12 ч.

3 Рекомендуем использовать из задачника [1] упражнения на системы уравнений со **стр. 50–51**: A1–A15, и задачи посложнее: **стр. 150–152** C2, C5, **стр. 159–160** C4, C7.

Задача 57*. В классе учатся 30 человек: отличники, троечники и двоечники. Отличники на все вопросы отвечают правильно, двоечники всегда ошибаются, а троечники на заданные им вопросы строго по очереди то отвечают верно, то ошибаются. Всем ученикам было задано по три вопроса: «Ты отличник?», «Ты троечник?», «Ты двоечник?». Ответили «Да» на первый вопрос — 19 учащихся, на второй —- 12, на третий — 9. Сколько троечников учится в этом классе? [*Московская окружная олимпиада, 2016 г. 8 кл.*]

1.6 Модуль числа

1.6.1 Определение модуля числа и простейшие вычисления

Модуль действительного числа является его важным свойством, которое, можно сказать, характеризует его величину. Например, температура воздуха, равная $+30°C$ или $-30°C$, — одинаково очень большая. Но в первом случае очень жарко, а во втором — очень холодно.

Определение 7. *Модуль* числа нуль равен нулю: $|0| = 0$.
Модулем положительного числа x называют само это число: $|x| = x,$ если $x > 0$.
Модуль отрицательного числа x — это противоположное число: $|x| = -x,$ если $x < 0$.
Иногда это определение выписывают как **алгоритм вычисления модуля числа**:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x > 0; \\ 0, \text{если } x = 0; \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Задача 58. Найдите модуль числа:

а) $|-7|$.
б) $|7|$.
в) $|7{,}8|$.
г) $|-7{,}8|$.
д) $\left|-1{,}125 + \frac{9}{8}\right|$.
е) $\left|1 - \frac{11}{12}\right|$.
ж) $\left|1 - \frac{12}{11}\right|$.
з) $\left|\frac{1}{12} - \frac{1}{13}\right|$.
и) $|(7-57)(2{,}4-4{,}9)|$.
к) $\left|\frac{11}{12} - \frac{12}{13}\right|$.
л) $\left|\frac{13}{12} - \frac{14}{13}\right|$.
м) $|-255 + 254|$;
н) $\left|\frac{1213}{12} - \frac{1314}{13}\right|$.
о) $\left|\frac{11}{12} - \frac{10}{11}\right|$.

Задача 59. Вычислите

а) $|-7| - |7|$.
б) $|179 - 3278| - |3278 - 179|$.
в) $|7{,}8| - |-7{,}8|$;
г) $|-17{,}5| + |17{,}5|$;
д) $\left|1 - \frac{11}{12}\right| - \left|-1 + \frac{11}{12}\right|$;
е) $|99 - 5678| - |5678 + 99|$;
ж) $|0{,}92 - 3{,}5| + |0{,}92 - 0{,}35| + |0{,}35 - 3{,}5|$.

Задача 60. При каких значениях переменной верны следующие равенства?

а) $|x| = 5$;
б) $|x| = -5$;
в) $|x| = 0$;
г) $|2x| = 5$;
д) $|7x| = 0$;
е) $|x + 0{,}12345| = -0,6789$;
ж) $|x - 12| = 0$;
з) $|x - 1| = 5$;
и) $|x + 1| = 5$.

Задача 61. Решите уравнения:

а) $|x| = 3{,}14$;
б) $|x| = -\frac{6}{7}$;
в) $|-x| = 0$;
г) $|3x| = 2{,}7$;
д) $|0{,}5x^2| = 0$;
е) $|x + 2| = 3{,}14$;
ж) $|7x - 0{,}12| = -1{,}6$;
з) $|x - 2{,}7| = 0$;
и) $|6x - 26| = 0$.

Задача 62. Выясните, при всех ли значениях переменных верно равенство:

а) $|x^2| = x^2$.
б) $|x^3| = x^3$.
в) $|x|^2 = x^2$.
г) $|x|^5 = x^5$.
д) $|x|^{2020} = x^{2020}$.
е) $|x + 10| = |x| + 10$.
ж) $||x| + 1| = |x| + 1$.
з) $||x| - 1| = |x| - 1$.
и) $|x - 10| = |10 - x|$.

1.6.2 Геометрический смысл модуля числа

Модуль помогает записывать формулой функции, возникающие в том числе и на практике.

Пример 16. Представьте, что вы идёте по длинной прямой дороге из дома в школу. Допустим, расстояние между домом и школой 900 м. Тогда, если вы удалились от дома на расстояние x м, то до школы осталось $(900 - x)$ м. Можно ввести функцию $d(x) = 900 - x$, выражающую расстояние от вас до школы. Например, если вы прошли $x = 500$ м, то осталось $d(x) = 400$ м. Формула работает. Но что произойдёт с нашей формулой, если вы решили не заходить в школу и прошли мимо? Например, если $x = 1000$ м, то $d(x) = 900 - 1000 = -100$ м, но это какая-то ерунда! Расстояние не бывает отрицательным. Зато ясно, что в случае, если вы прошли больше 900 м, расстояние нужно измерять по другой формуле: $d(x) = x - 900$. Всё вместе наше правило можно записать так:

$$d(x) = \begin{cases} 900 - x, \text{если } x \leqslant 900 \\ x - 900, \text{если } x > 900 \end{cases}$$

Но можно воспользоваться знаком модуля и записать ту же формулу без случаев:

$$d(x) = |900 - x|.$$

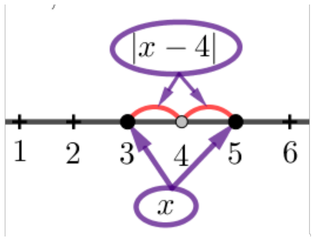
Определение 8. Модуль числа — это расстояние на числовой прямой между этим числом и нулём.

Теорема. Величина $|a - b|$ равна расстоянию на числовой прямой между точками a и b.

Вопрос 30. Как доказать эту теорему?

Вопрос 31. Эквивалентны ли определения 7 и 8?

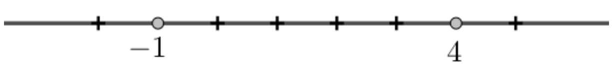
Пример 17. Найдите все значения x, при которых $|x - 4| = 1$.

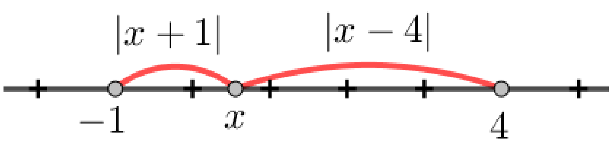


Решение. Отметим на координатной прямой точку 4 и, пользуясь теоремой, сформулированной выше, найдём те точки, которые от этой точки находятся на расстоянии 1, см. рисунок справа. Ясно, что таких точек ровно две — слева и справа от данной точки. А именно, это точки 3 и 5.
__Ответ.__ 3; 5.

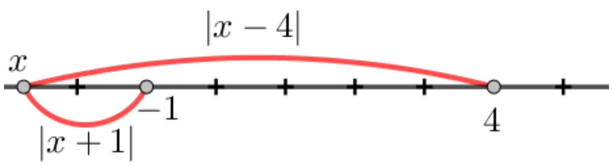
Пример 18. Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух чисел, найдите все значения x, при которых $|x - 4| + |x + 1| = 6$.

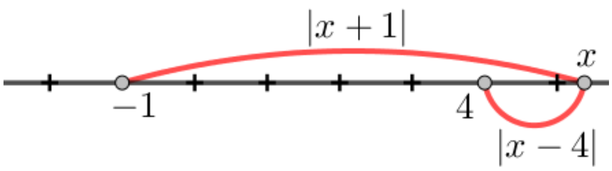
Решение. Заметим, что $|x - 4|$ — это длина отрезка числовой прямой с концами в точках x и 4. Далее, $|x + 1| = |x - (-1)|$, то есть это расстояние между точками x и (-1). Отметим на числовой прямой точки -1 и 4:





Где может располагаться точка x? Есть три случая, см. рисунки. В каждом случае два модуля, которые нужно сравнить, являются расстояниями от точки x до точек -1 и 4.





$\mathcal{M}$ **Данное уравнение эквивалентно такому геометрическому свойству: «сумма расстояний от точки x до точек 4 и -1 равна 6».**

Для каких точек прямой выполнено это свойство? Заметим, что для точек x, лежащих внутри отрезка, сумма расстояний до его концов равна его длине, то есть числу 5. Этот вариант нам не подходит, ведь $5 \neq 6$. Если же точка расположена вне отрезка, то в сумму расстояний до его концов дважды входит расстояние до ближайшего конца и один раз — длина отрезка (на рисунках видно, что длина отрезка один раз «покрыта» красной дугой, а расстояние до ближайшего конца — дважды).

Таким образом, получаем, что точка x расположена вне нашего отрезка и

$$6 = 5 + 2 \cdot (\text{расст. до ближ.конца}),$$

то есть расстояние до ближайшего конца равно 0,5. Получаем две точки: $-1-0{,}5$ и $4+0{,}5$.
Ответ. $-1{,}5$ и $4{,}5$.

Задача 63. В каждом пункте ответьте, какое геометрическое свойство записано с помощью данного равенства. Решите уравнение, опираясь на это свойство.

а) $|x-6| = 2$;
б) $|x-1| = |x-5|$;
в) $|x-6| = 2|x+6|$;
г) $|x-1| + |x-5| = 2$;
д) $|x-1| = |x-5| + 4$;
е) $|x+3| = 7$;
ж) $|x-6| = |x+6|$;
з) $2|x-6| = |x+6|$;
и) $|x-1| + |x-5| = 4$;
к) $|x-1| = |x-5| + 2$;
л) $|x-2{,}6| = 7{,}5$;
м) $|x+12| = |x+17|$;
н) $0{,}5|x-4| = |x+5|$;
о) $|x-1| + |x-5| = 8$;
п) $|x-5| = |x-1| + 7$.

Задача 64. **а)** На длинной прямой улице на расстоянии 100 м друг от друга расположены дома двух друзей. Друзья выбирают точку на улице и объявляют её своим местом встречи. Какой, самое меньшее, может быть сумма расстояний от двух домов до места встречи? В каких точках прямой сумма расстояний от домов до места встречи будет минимальной возможной?
б) Какое наименьшее значение может принимать функция $f(x) = |x-50| + |x-150|$?
в) Существует ли точка на улице, в которой сумма расстояний до домов равна 1 км? Если да, то сколько есть таких точек и где они расположены?
г) Решите уравнение $|x-50| + |x-150| = 1000$.

Задача 65*. **а)** На этот раз семеро друзей живут в двух домах на расстоянии 100 м: пятеро в одном доме, двое в другом. Они договорились встретиться и ищут точку на улице с минимальной суммой семи расстояний. Где эта точка?
б) Найдите наименьшее значение функции $g(x) = 5|x-50| + 2|x-150|$.

Задача 66*. Решите уравнение:
а) $|x-4| + |x-2| + |x| + |x+2| + |x+4| = 12$; **б)** $|x-4| + |x-2| + |x| + |x+2| + |x+4| = 13$;
в) $|x-4| + |x-2| + |x| + |x+2| + |x+4| = 11$; **г)** $|x-4| + |x-2| + |x| + |x+2| + |x+4| = 520$.

Список литературы

[1] С.А. Шестаков, И.В. Ященко. *Математика. Многоуровневый сборник задач. 7–9 классы. Часть 1. Алгебра.* Москва. Просвещение. 2020.

[2] Блинков А.Д. «*Учимся на чужих ошибках*». МЦНМО. 2019.

[3] И.М. Гельфанд, А. Шень. *Алгебра.* МЦНМО. 4-е изд. 2017. `https://www.mccme.ru/free-books/shen/gelfand-shen-algebra.pdf`

[4] Алфутова Н.Б., Устинов А. В. «*Алгебра и теория чисел*». МЦНМО. 2002. `https://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf`

[5] Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии» `http://zadachi.mccme.ru/`

[6] М.А. Волчкевич. *Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы.* МЦНМО, 2016.

[7] И.В. Раскина. *Логика для всех. От пиратов до мудрецов.* МЦНМО. 2016.

[8] *Логика логики.* Сергей Агаханов. Журнал «Квантик», 2015, №9. `http://old.kvantik.com/art/files/pdf/2015-09.2-5.pdf`

[9] *Десять логиков в кафе.* Григорий Гальперин. Журнал «Квантик», 2015, №11. `http://old.kvantik.com/art/files/pdf/2015-11.34-34.pdf`

[10] Журнал «Квантик», 2015, №12. Решение к задаче «Десять логиков в кафе» из №11. Стр. 30. `https://kvantik.com/issue/pdf/2015-12.pdf`

[11] Александр Шень (под ред.). *Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы* (выпуск 2000 года, класс В) (с1). М.: МЦНМО, 2000, 272 с. `https://www.mccme.ru/free-books/57/shen.pdf`