Преобразование рациональных выражений

Разложите на множители:

1.1. $a^2-10a+25$;
1.2. $a^2-10a-24$;
1.3. a^4+a^2+1;
1.4. a^4+4;
1.5. a^4+2a^2+9;
1.6. $a^4-8a+63$.

Разложите на множители:

2.1. a^3+8;
2.2. a^3+a+10;
2.3. a^6+a^2+2;
2.4. $28a^3-3a^2+3a-1$.

Разложите на множители:

3.1. $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$;
3.2. a^5+a+1;
3.3. a^8+a^7+1.

4.1. Представьте выражение в виде произведения трёх многочленов с целыми коэффициентами: $x^8-x^6-4x^2-16$.

4.2. Представьте выражение $2a^2+2b^2$ в виде суммы квадратов двух многочленов с целыми коэффициентами.

4.3. Представьте выражение $(a^2+ab+b^2)^2$ в виде суммы квадратов трех многочленов с целыми коэффициентами.

5.1. Разложите на множители: $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

5.2. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, увеличенное на 1, является квадратом натурального числа.

6.1. Разложите на множители: $a^3+b^3+c^3-3abc$.

6.2. Докажите, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

6.3. Разложите на множители: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.

6.4. Докажите, что если $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$, то $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$.

7.1. Разложите на множители: $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

7.2. Упростите выражение: $(a+b+c)^3+(a-b-c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3$.

Вычислите рациональным способом:

8.1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$;
8.3. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 101}$;

8.2. $\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{117\cdot 118}$;
8.4. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{65\cdot 68}$.

9.1. Известно, что $x+\frac{1}{x}=3$. Вычислите $x^3+\frac{1}{x^3}$.

9.2. Известно, что $a+\frac{1}{a}=4$. Вычислите $a^3+2a^2+\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^3}$.

9.3. Докажите, что если $a+b+c=1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, то $a^2+b^2+c^2=1$.

10.1. Докажите, что если $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$, то $a^2b^2c^2=1$ либо $a=b=c$.

10.2. Известно, что $abc=1$. Упростите выражение

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}.$$

10.3. Докажите, что если $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=1$, то одна из дробей в этом равенстве равна -1, а две другие равны 1.