А. БЛИНКОВ, В. ГУРОВИЦ, А. МЯКИШЕВ,
Д. ПРОКОПЕНКО, П. ЧУЛКОВ,
Москва

Турнир Архимеда
Московская математическая регата
7 класс

18 апреля 2009 года в Московском городском дворце детского (юношеского) творчества состоялась математическая регата для учащихся 7-х классов, завершившая очередной сезон регат. В ней приняли участие 82 команды из Москвы, Костромы и Подмосковья (Долгопрудный, Мытищи, Поварово, Солнечногорск, Ступино, Черноголовка).

Абсолютным победителем регаты стала команда школы № 853 (г. Зеленоград), получившая диплом первой степени. Дипломами второй и третьей степени были награждены еще 13 команд. Несколько команд получили поощрительные призы.

Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://www.mccme.ru/olympiads). Там же можно найти материалы регат предыдущих лет, которые ежегодно публикуются и на страницах газеты «Математика». Прочитать подробно о том, как проводятся математические регаты, и познакомиться с материалами прошедших регат можно в книге «Московские математические регаты» (составители: А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, Е.С. Горская, издательство МЦНМО, 2007).

Как всегда, каждый участник и руководитель команды по окончании регаты получил небольшую брошюру с условиями и решениями задач, только что прошедшей регаты. Эти специальные выпуски регулярно готовятся коллективом редакции «Архимед» под руководством П.В. Чулкова.

Как обычно, часть заданий придумывалась авторами специально для этой регаты, а остальные являются математическим фольклором или взяты из популярной математической литературы. Тексты решений опубликованы в том виде, в котором они готовились для работы жюри.

Условия задач

Первый тур

(10 минут; каждая задача — 6 баллов)

1.1. Разложите на множители:
$$1 + 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2.$$

1.2. Два угла треугольника равны 100° и 60°. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.

1.3. Из Москвы в Неаполь самолет вылетает в 9.20 по московскому времени, а прилетает в 11.30 по неаполитанскому. Из Неаполя в Москву самолет вылетает в 8.30 по неаполитанскому времени, а прилетает в 14.40 по московскому. Какова разница во времени между Москвой и Неаполем?

Второй тур

(15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Балда договорился с попом отработать на него ровно год и расплатиться щелчками по лбу. Балда предложил, чтобы за каждый отработанный день ему добавлялся один щелчок, а за каждый прогул вычиталось 10 щелчков. Поп же настаивал на более хитром (по его мнению) варианте: за отработанный день начисляется 12 щелчков, а за пропущенный вычитается аж 121 щелчок. По окончании срока выяснилось, что в обоих случаях поп должен получить от Балды одно и то же количество щелчков. Сколько именно?

2.2. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно так, что $BD = BE$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F. Найдите угол AFC, если угол EAC равен 25°.

2.3. Может ли сумма квадратов двух простых чисел быть квадратом какого-нибудь целого числа?

Третий тур

(15 минут; каждая задача — 7 баллов)

3.1. Несколько учеников отвечали на уроке, и каждый получил не ниже тройки. Аня получила отметку, которая на 10 меньше, чем сумма отметок остальных; Боря получил отметку, которая на 8 меньше, чем сумма отметок остальных; Вера —

отметку, которая на 6 меньше, чем сумма отметок остальных. Сколько человек отвечало на уроке и какие отметки они получили?

3.2. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 30°$, BB_1 и CC_1 — высоты, B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. Под каким углом пересекаются прямые B_1C_2 и C_1B_2?

3.3. В школе прошел шахматный турнир, в котором участвовало 20 шахматистов (каждый сыграл с каждым один раз). После подведения итогов оказалось, что Толя с 9,5 очками занял 19-е место, ни с кем его не разделив. Единоличным же победителем оказался Витя. Определите, сколько очков набрал каждый участник. (В шахматах за победу присуждается одно очко, за поражение — 0 очков, за ничью — пол-очка.)

Четвертый тур

(20 минут; каждая задача — 8 баллов)

4.1. Сравните:
$400^5 - 399^2(400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$ и 2000.

4.2. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 1)
$$\angle CAD + \angle BCA = 180°$$
и
$$AB = BC + AD.$$
Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

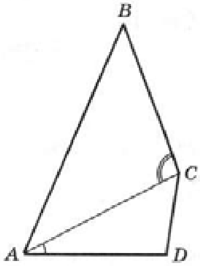

Рис. 1

4.3. Коля выписал все трехзначные числа, в записи которых нет нулей. Для каждого такого числа Вася записал сумму двух его цифр: наименьшей и наибольшей. Найдите сумму чисел, записанных Васей.

Решения задач

1.1. $(1 + a^2 - b^2)(1 - a^2 + b^2)$.

Раскроем скобки и перегруппируем:
$$1 + 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2 =$$
$$= 1 + 4a^2b^2 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4 =$$
$$= 1 - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 1 - (a^2 - b^2)^2 =$$
$$= (1 + a^2 - b^2)(1 - a^2 + b^2).$$

1.2. См. рисунок 2.

Пусть в треугольнике ABC углы A и B равны 60° и 100° соответственно, тогда угол C равен 20° (см. рис. 2).

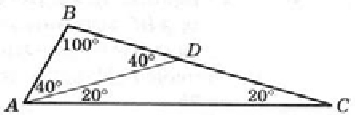

Рис. 2

Проведем отрезок AD так, чтобы $\angle DAC = 20°$. Тогда в каждом из треугольников ADC и ABD есть по два равных угла, то есть эти треугольники — равнобедренные.

1.3. 2 часа.

Перелет в обе стороны длится одно и то же время, но из-за смены часовых поясов возникает разница во времени. В первом случае показания часов отличаются на 2 часа 10 минут, а во втором — на 6 часов 10 минут. Так как в первом случае мы из времени перелета вычитаем разницу во времени, а во втором — ее же прибавляем, то разница во времени между Москвой и Неаполем равна:
$$(6 \text{ ч } 10 \text{ мин} - 2 \text{ ч } 10 \text{ мин}) : 2 = 2 \text{ ч}.$$

Комментарий. Такой же результат можно получить из уравнения
$$2\frac{1}{6} + x = 6\frac{1}{6} - x,$$
где x — искомая разница во времени (в часах).

2.1. 3 щелчка.

Способ I. Предположим, что год не високосный. Пусть Балда x дней отработал, а $(365 - x)$ дней прогулял, тогда по своему предложению он будет иметь право
$$x - (365 - x) \cdot 10 = 11x - 365 \cdot 10 \text{ щелчков},$$
а по предложению попа —
$$12x - (365 - x) \cdot 121 = 133x - 365 \cdot 121 \text{ щелчков}.$$

Поскольку в итоге выяснилось, что количество щелчков в обоих случаях одно и то же, то составляем уравнение $11x - 365 \cdot 10 = 133x - 365 \cdot 121$. Упростив его, получим: $122x = 365 \cdot 111$. Такое уравнение не имеет натуральных решений.

Если же год високосный, то, рассуждая аналогично, получим уравнение $122x = 366 \cdot 111$, то есть $x = 333$. Следовательно, поп должен получить от Балды $333 - (366 - 333) \cdot 10 = 3$ щелчка.

Способ II. Пусть Балда отработал a дней и прогулял b дней, тогда $a - 10b = 12a - 121b$. Упрощая это равенство, получим, что $11a = 111b$. Поскольку числа 11 и 111 – взаимно простые, то a кратно 111, b кратно 11. Так как $a \le 366$, то a может быть равно 111, 222 или 333. Соответствующие значения b: 11; 22; 33. Тогда сумма $a + b$ (количество дней в году) принимает значения 122, 244 и 366 соответственно. Отсюда заключаем, что год был високосным, то есть $a = 333$, $b = 33$. Следовательно, попу причитается

$$a - 10b = 333 - 330 = 3 \text{ щелчка}.$$

Комментарий. Отметим, что полученный ответ полностью согласуется с литературным источником: *Пушкин А.С.* Сказка о попе и его работнике Балде.

2.2. 130°.

Так как $AB = BC$ и $BD = BE$, то $AD = CE$ (рис. 3).

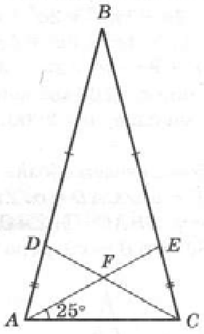

Рис. 3

Кроме того, $\angle BAC = \angle BCA$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Рассмотрим треугольники ACD и CAE. Так как у них общая сторона AC, то эти треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle DCA = \angle EAC = 25°$. Тогда из треугольника AFC получим, что $\angle AFC = 180° - (25° + 25°) = 130°$.

2.3. Нет, не может.

Пусть такое возможно, тогда выполняется равенство $a^2 + b^2 = x^2$, где a и b — простые числа. Тогда $b^2 = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$. Это возможно только в двух случаях:

$$x - a = x + a = b \text{ или } x - a = 1;\ x + a = b^2.$$

В первом случае $a = 0$, что противоречит условию. Во втором случае $x = a + 1$, тогда $2a + 1 = b^2$, то есть $2a = (b - 1)(b + 1)$. Если $b = 2$, то a — не целое число, следовательно, b — нечетное. Тогда $b - 1$ и $b + 1$ — соседние четные числа, значит, одно из них кратно 2, а другое кратно 4. Следовательно, $2a$ делится на 8, то есть a делится на 4 — противоречие.

Комментарий. Получив, что $a = x - 1$, можно также было провести аналогичное рассуждение и получить, что $b = x - 1$. Тогда $a = b$, и исходное равенство примет вид $2a^2 = x^2$, что невозможно для целых значений a и x.

3.1. Отвечало 4 человека; один получил «5», двое — «4», один — «3».

Пусть S – сумма всех полученных отметок, A — отметка Ани, $Б$ — Бори, $В$ — Веры. Из условия задачи следует, что:

$$S - A = A + 10;\ S - Б = Б + 8;\ S - В = В + 6.$$

Следовательно,

$$S = 2A + 10 = 2Б + 8 = 2В + 6.$$

Значит,

$$В - Б = Б - A = 1.$$

Так как двоек не было, то возможен только один вариант: $A = 3$, $Б = 4$, $В = 5$. Следовательно, $S = 16$, тогда $S - (A + Б + В) = 4$, то есть еще один ученик получил отметку «4».

3.2. Под прямым углом.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABB_1, B_1C_2 — его медиана (рис. 4).

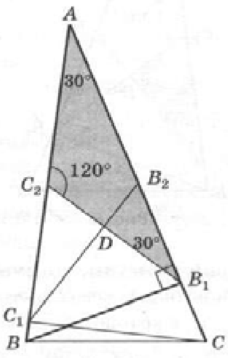

Рис. 4

По свойству этого прямоугольного треугольника

$$B_1C_2 = \frac{1}{2}AB = AC_2.$$

Следовательно, треугольник AC_2B_1 — равнобедренный с углом 30° при основании, значит, $\angle AC_2B_1 = 120°$. Аналогично, C_1B_2 — медиана прямоугольного треугольника ACC_1 (рис. 5), поэтому

$$C_1B_2 = \frac{1}{2}AC = AB_2.$$

Следовательно, треугольник AB_2C_1 — также равнобедренный с углом 30° при основании.

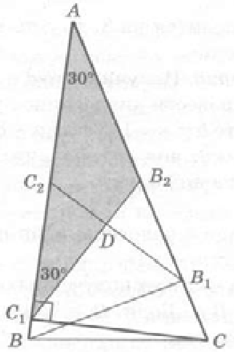

Рис. 5

Рассмотрим треугольник C_1C_2D, где D — точка пересечения отрезков B_1C_2 и C_1B_2 (рис. 6). Пусть $\angle C_1DC_2 = \theta$. По теореме о внешнем угле треугольника $\theta + 30° = 120°$. Следовательно, искомый угол между прямыми B_1C_2 и C_1B_2 равен $90°$.

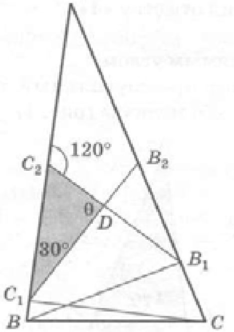

Рис. 6

Комментарий. Отметим, что вместо треугольника AB_2C_1 можно было рассмотреть треугольник B_2CC_1 (см. рис. 5), в котором

$$C_1B_2 = \frac{1}{2}AC = CB_2 \text{ и } \angle ACC_1 = 90° - \angle BAC = 60°.$$

Следовательно, этот треугольник — равносторонний, значит, $\angle C_1B_2C = 60°$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника $\angle B_1DB_2 = 90°$.

3.3. Витя набрал 0,5 очков, Толя — 9,5 очков, занявший последнее место набрал 0 очков, а каждый из остальных участников набрал 10 очков.

Общее количество партий, сыгранных в турнире, равно

$$\frac{20 \cdot 19}{2} = 190.$$

Поскольку в каждой партии разыгрывается одно очко, то сумма очков, набранных всеми участниками, равна 190. Вычтем очки, набранные Толей: $190 - 9{,}5 = 180{,}5$ — сумма очков, набранных остальными участниками. Поскольку 18 человек оказались в турнирной таблице выше Толи, то каждый из них набрал не менее чем 10 очков, а в сумме они набрали не менее 180 очков. Оставшиеся пол-очка обязан был набрать Витя, так как он единолично занял первое место.

Комментарий. Покажем, что описанная ситуация возможна. Действительно, пусть каждый участник выиграл у занявшего последнее место, Витя победил Толю, а все остальные партии закончились вничью.

4.1. Первое число меньше второго.

Пусть $a = 400$, тогда первое выражение примет вид:

$$a^5 - (a-1)^2(a^3 + 2a^2 + 3a + 4).$$

Преобразуем его:

$$\begin{aligned} &a^5 - (a-1)^2(a^3 + 2a^2 + 3a + 4) = \\ &= a^5 - (a^2 - 2a + 1)(a^3 + 2a^2 + 3a + 4) = \\ &= a^5 - a^5 - 2a^4 - 3a^3 - 4a^2 + 2a^4 + 4a^3 + \\ &\quad + 6a^2 + 8a - a^3 - 2a^2 - 3a - 4 = 5a - 4. \end{aligned}$$

Таким образом, при $a = 400$ значение выражения равно 1996, что меньше, чем 2000.

4.2. Для удобства введем обозначения (рис. 7):

$$AD = x,\ BC = y,\ \angle CAD = \alpha,\ \angle ACB = \beta,$$
$$\angle ADC = \gamma,\ \angle BAC = \delta,\ \angle ACD = \phi.$$

Тогда $\alpha + \beta = 180°$ и $AB = x + y$ (по условию).

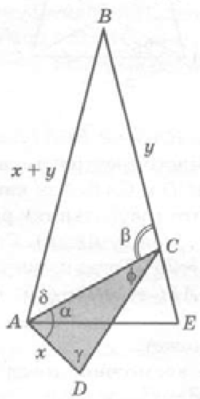

Рис. 7

Если сумма двух углов равна 180°, то можно приложить их один к другому так, чтобы они имели общую сторону, а две другие стороны стали противоположными лучами. Поэтому «отрежем» треугольник ACD, перевернем его и приставим обратно так, чтобы вершины A и C поменялись местами. Новое положение вершины D обозначим

E. Так как $\alpha + \beta = 180°$, то точки B, C и E будут лежать на одной прямой.

При этом $CE = AD = x$, то есть $BE = x + y = AB$ (рис. 8). В равнобедренном треугольнике ABE углы при основании равны, то есть $\delta + \phi = \gamma$, что и требовалось.

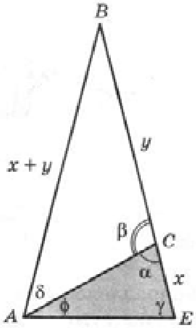

Рис. 8

4.3. 7290.

Поскольку каждая цифра от 1 до 9 может стоять на любом из трех мест, то общее количество чисел, записанных Колей, равно $9^3 = 729$.

Разобьем эти числа на пары: 111 – 999, 112 – 998 и так далее, таких пар будет $(729 - 1) : 2 = 364$ (число 555 останется без пары).

Пусть в первом числе некоторой пары наименьшая цифра равна a, тогда во втором числе наибольшая цифра равна $10 - a$. Аналогично, если в первом числе наибольшая цифра равна b, то наименьшая цифра во втором числе равна $10 - b$. Тогда в каждой паре сумма двух наименьших и двух наибольших цифр равна 20. Общая сумма таких цифр будет равна $20 \cdot 364 = 7280$. Добавив к этой сумме 10 (сумма наибольшей и наименьшей цифры числа 555), получим 7290.

Комментарий. Отметим, что подсчет искомой суммы «в лоб» связан со значительными техническими трудностями.