

## Неравенство Бернулли.

Классическое неравенство Бернулли: если  $x > -1$ , то для любого натурального  $n$  верно неравенство  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , равенство достигается при  $x=0$  или  $n=1$ .

1. Докажите обобщенное неравенство Бернулли: а) если  $n<0$  или  $n>1$ , то  $(1+x)^n \geq 1+nx$ , б) если  $0 < n < 1$ , то  $(1+x)^n \leq 1+nx$ , где  $x > -1$ ; равенства имеют место только при  $x=0$ .

Докажите неравенства:

2.  $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} < 2\sqrt{2}$ ,
3.  $(\sin^2 x)^{\cos^2 x} + (\cos^2 x)^{\sin^2 x} \leq 1 + \frac{1}{2} \sin^2 2x$ ,
4.  $5^{10} + 6^{10} < 7^{10}$ ,
5.  $\sqrt[5]{5 - \sqrt{x}} + \sqrt[5]{5 + \sqrt{x}} \leq 2\sqrt[5]{5}$ .

Решите уравнения:

6.  $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 4$ ,
7.  $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x^2} = 4$ ,
8.  $\sqrt{1 - \frac{x}{3}} + \sqrt[6]{1+x} = (1 - \frac{x}{24})^4 + (1 + \frac{x}{36})^6$ ,
9.  $\sqrt[5]{1 + \sqrt{1-x^2}} + \sqrt[5]{1 - \sqrt{1-x^2}} = 2$ ,
10.  $\sqrt[17]{1 + \sqrt{1-x^{17}}} + \sqrt[17]{1 - \sqrt{1-x^{17}}} = 2$ ,
11.  $\sqrt[20]{1-2x} + \sqrt[21]{1+2x} = \sqrt[22]{1-3x} + \sqrt[23]{1+3x}$ ,
12.  $x = \lg(9x+1)$