

Изогональное сопряжение. Педальные треугольники.

Свойства изогоналей. Педальный треугольник.

Внутри угла BAC даны точки P и Q .

1. B_1 и C_1 – проекции точки P на стороны угла. Тогда $AQ \perp B_1C_1$ тогда и только тогда, когда AP и AQ – изогоналы.
2. Пусть X и Y – точки, симметричные точке P относительно сторон угла BAC . Тогда AQ – серединный перпендикуляр к XY .
3. Внутри угла BAC дана точки P и Q . Их проекции на стороны угла лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда AP и AQ – изогоналы.
4. *Лемма о подобии.* Пусть прямые AP , BP и CP пересекают описанную вокруг треугольника ABC окружность в точках A' , B' и C' соответственно. Докажите, что педальный треугольник точки P подобен окружностно-чевианному треугольнику $A'B'C'$ точки P .

Теорема Чевы в форме синусов: три чевианы AA' , BB' и CC' треугольника ABC пересекаются в одной

точке t . и т. т., когда
$$\frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle B'BC} \cdot \frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle A'AC} \cdot \frac{\sin \angle BCC'}{\sin \angle C'CB} = 1.$$

Изогональное сопряжение.

Теорема. Прямые, симметричные прямым AP , BP и CP относительно биссектрис углов A , B и C треугольника ABC соответственно, пересекаются в одной точке (назовем ее Q). **Точки P и Q называют изогонально сопряженными относительно треугольника ABC .**

Пусть A_1 , B_1 и C_1 – проекции точки P на стороны BC , AC и AB соответственно.

Доказательство.

1. Теорема Чевы в форме синусов.
2. **Пересечение ГМТ.** Луч из вершины как ГМТ, отношение расстояний от которых до сторон угла постоянно.
3. **Q – центр описанной окружности.** Симметрия относительно сторон треугольника. Тогда точка Q – центр описанной окружности вспомогательного треугольника $P_1P_2P_3$.
4. **Q – ортоцентр вспомогательного треугольника.** Пусть точки H_1 , H_2 и H_3 – ортоцентры треугольников AB_1C_1 , BA_1C_1 и CB_1A_1 соответственно. Тогда точка Q – ортоцентр треугольника $H_1H_2H_3$.
5. **Окружностно-чевианный треугольник.** Пусть педальный треугольник точки P при преобразовании подобия переходит в окружностно-чевианный треугольник точки P (см. Лемму о подобии); точка P в точку Q ; лучи A_1P , B_1P и C_1P переходят в лучи $A'Q$, $B'Q$ и $C'Q$. Тогда точки P и Q изогонально сопряженные относительно треугольника $A'B'C'$.

Для разбора

К двум окружностям w_1 и w_2 , пересекающимся в точках A и B , проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD , чем A). Прямая, проходящая через A , вторично пересекает w_1 и w_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P . Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL . Блинков Ю., Устная олимпиада по геометрии, 2004, 10-11.6.

Для самостоятельного решения

1. **Теорема 1.** Изогонально сопряженные точки имеют общую pedalную окружность.
2. **Теорема 2.** Тройка прямых, проходящих через вершины треугольника, пересекается в одной точке, расположенной на описанной около этого треугольника окружности, тогда и только тогда, когда прямые, симметричные данным относительно биссектрис соответствующих углов, параллельны.
3. Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках B и C , пересекаются в точке P . Докажите, что прямая AP содержит симедиану треугольника ABC . *Указание:* удвоим медиану из вершины A . Получим точку D . Докажите, что точки D и P — изогонально сопряжены по определению, т.е. лежат на соответствующих изогоналах.
4. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что pedalная окружность точки D относительно треугольника ABC проходит через точку пересечения его диагоналей. П.Кожевников, Областные олимпиады, 1998–1999, 10.6. *Указание:* теорема 1.
5. Треугольник ABC вписан в окружность. Через точки A и B проведены касательные к этой окружности, которые пересекаются в точке P . Точки X и Y — ортогональные проекции точки P на прямые AC и BC . Докажите, что прямая XY перпендикулярна медиане треугольника ABC , проведенной из вершины C *устная городская олимпиада по геометрии, 2004, 8-9 класс, №4.*
6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_A , BH_B и CH_C . Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников AH_BH_C , BH_AH_C , CH_AH_B равен треугольнику $H_AH_BH_C$. А. Акопян, ММО, 2001, 10.4.
7. Внутри остроугольного треугольника выбрана точка P . $A_1B_1C_1$ — pedalный треугольник точки P . Пусть точки A_2, B_2 и C_2 — ортоцентры треугольников AB_1C_1 , BA_1C_1 и CB_1A_1 соответственно. Тогда прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Для обсуждения: из доказательства 3 изогонального сопряжения известно, что Q — центр описанной окружности треугольника $P_1P_2P_3$. (Симметрия точки P относительно сторон треугольника). Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC . Тогда треугольник $P_1P_2P_3$ вырождается в прямую $P_1P_2P_3$, параллельную прямой Симсона точки P . Точка Q_∞ «уходит» на бесконечность. Тогда параллельные прямые AQ_∞ , BQ_∞ , CQ_∞ — изогонали для прямых AP , BP , CP . Сравните с **Теоремой 2**.