

7 КЛАСС

ЗАДАЧИ К ИТОГОВОМУ ЗАЧЁТУ ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть I

1. Сумма двух углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, в 5 раз больше суммы двух других. Найдите все образовавшиеся углы.
2. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
3. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.
4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AB + AC = A_1B_1 + A_1C_1$. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
5. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AB + AC = A_1B_1 + A_1C_1$, BD и B_1D_1 – медианы этих треугольников. Докажите, что $BD = B_1D_1$.
6. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC , пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB , если $BM = 8$, $KC = 1$.
7. Внешние углы треугольника ABC при вершинах A и C равны 115° и 140° . Прямая, параллельная прямой AC , пересекает стороны AB и BC в точках M и N . Найдите углы треугольника BMN .
8. Через точку M , лежащую внутри угла с вершиной A , проведены прямые, параллельные сторонам угла и пересекающие эти стороны в точках B и C . Известно, что $\angle ACB = 50^\circ$, а угол, смежный с углом ACM , равен 40° . Найдите углы треугольников BCM и ABC .
9. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. Верно ли обратное утверждение?
10. Прямая, проходящая через точку пересечения биссектрис треугольника ABC параллельно стороне AB , пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN = AM + BN$.
11. Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из вершин A и B , пересекаются в точке H , причем $\angle AHB = 120^\circ$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C , пересекаются в точке K , причем $\angle BKC = 130^\circ$. Найдите угол ABC .
12. В треугольнике ABC угол A меньше угла B в 3 раза, а внешний угол при вершине A больше внешнего угла при вершине B на 40° . Найдите внутренние углы треугольника ABC .
13. Докажите, что угол между высотой и биссектрисой, проведенными из одной вершины треугольника, равен полуразности двух других его углов.
14. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108° . Перпендикуляр к биссектрисе AD этого треугольника, проходящий через точку D , пересекает сторону AC в точке E . Докажите, что $DE = BD$.
15. В треугольнике ABC угол A равен 60° , а биссектриса угла A , медиана, проведенная из вершины B , и высота, проведенная из вершины C , пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.
16. Докажите, что биссектрисы равностороннего треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника.

17. На сторонах AC и BC равностороннего треугольника ABC построены внешним образом равнобедренные прямоугольные треугольники ACN и BCM с прямыми углами при вершинах A и C соответственно. Докажите, что $BM \perp BN$.
18. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1, один из острых углов равен 15° . Найдите гипотенузу.
19. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL . Докажите, что треугольник AKL правильный.
20. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки), P – середина KD . Докажите, что $CP \perp AB$.
21. Даны треугольник ABC и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC , а середина отрезка CN – с серединой стороны AB . Докажите, что точки M , N и A лежат на одной прямой.
22. Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит пополам угол между основанием и биссектрисой угла при основании. Найдите углы треугольника.
23. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M , причем $AK=AC$ и $BM=BC$. Найдите угол MCK .
24. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B соответственно взяты точки K и M , причем $AK=AC$ и $BM=BC$. Найдите угол MCK .
25. Высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.

Часть II

1. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на отрезки, равные a и b ($a < b$). Найдите расстояние от центра окружности до каждой хорды.
2. BM и CN – высоты треугольника ABC . Докажите, что точки B , N , M и C лежат на одной окружности.
3. Докажите, что окружность, построенная на стороне равностороннего треугольника как на диаметре, проходит через середины двух других сторон треугольника.
4. Окружность, построенная на стороне треугольника как на диаметре, проходит через середину другой стороны. Докажите, что треугольник равнобедренный.
5. Продолжения хорд AB и CD окружности с диаметром AD пересекаются под углом 25° . Найдите острый угол между хордами AC и BD .
6. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.
7. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность с диаметром AB в точке K , отличной от A , а окружность с центром B – в точках M и N . Докажите, что $MK = KN$.
8. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке E . Точки касания окружностей с одной из общих внешних касательных обозначены за A и B . Докажите, что треугольник EAB прямоугольный.
9. Докажите, что в равностороннем треугольнике центр вписанной окружности совпадает с центром описанной окружности.

10. Окружность проходит через вершину C и середины D и E сторон BC и AC равностороннего треугольника ABC . Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон AB и BC , – касательная к окружности.
11. Окружность вписана в треугольник со сторонами, равными a , b и c . Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a .
12. Пусть r – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c . Докажите, что $r = \frac{a+b-c}{2}$.
13. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M . Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p . Докажите, что $x = p - a$.
14. К окружности, вписанной в треугольник, со сторонами a , b и c , проведена касательная, пересекающая стороны, равные b и c . Найдите периметр отсеченного треугольника.
15. Постройте прямоугольный треугольник по его гипотенузе и высоте h_c , проведенной к гипотенузе.
16. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и высоте, проведенной из вершины прямого угла.
17. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.
18. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне.
19. Постройте треугольник по его сторонам a и b и медиане m_a , проведенной к стороне a .
20. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
21. Постройте треугольник ABC по его сторонам a и b и высоте h_a , проведенной к стороне a .
22. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон. Найдите все возможные решения.
23. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу **описанной** окружности.
24. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу **вписанной** окружности.
25. Дана часть окружности, центр которой не указан. С помощью циркуля и линейки постройте центр окружности.

**В задачах на построение используются только циркуль и линейка без делений.*

Для подготовки рекомендуется литература:

- [1] Атанасян Л.С. Геометрия. 7-9 классы. М.: Просвещение, 2023.
- [2] Волчкевич М.А. Геометрия 7. Математическая Вертикаль. М.: Просвещение, 2020.
- [3] Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы. М.: МЦНМО, 2023.
- [4] Волчкевич М.А. Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы. М.: МЦНМО, 2016.
- [5] Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. М.: МЦНМО, 2020.