

Алгебра: $a + b + c = 0$

Задача для обсуждения

1. Известно, что $a + b + c = 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Какие значения могут принимать a , b и c ?

Полезные формулы

- $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Задачи для самостоятельного решения

Разложите на множители (№№1-3):

- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (выведите полезную формулу №2)
- $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.
- $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.
- Известно, что $a + b + c = 0$ и $a \neq c$. Сколько корней имеет квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$?

Известно, что $a + b + c = 0$. Найдите все значения, которые может принимать выражение (№№5-9):

- $a^3 + a^2c + b^2c + b^3 - abc$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
- $a^4 + b^4 + c^4 - 2(ab + bc + ca)^2$
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$
- $\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$.

10. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $ab + bc + ac \leq 0$.

11. Известно, что $a + b + c = 0$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Какие значения может

принимать $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$?

12. Известно, что $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Какие значения может принимать $a^4 + b^4 + c^4$?

13. Известно, что $a + b + c = 0$, $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Какие значения может принимать выражение $a^{2007} + b^{2007} + c^{2007}$?

14. Известно, что $a + b + c + d = 0$, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$. Какие значения может принимать $a^{2007} + b^{2007} + c^{2007} + d^{2007}$?