Сравнения по модулю

Пусть $m \in N$.

<u>*Определение 1*</u>. *Два целых числа* a *и* b *называются* ***сравнимыми по модулю m***, *если* a *и* b *дают одинаковые остатки при делении на* ***m***.

$$a \equiv b \ (mod\ m)$$

<u>*Определение 2*</u>. *Два целых числа* a *и* b *называются* ***сравнимыми по модулю m***, *если* $(a-b) ⋮ m$.

<u>Свойства сравнений</u>

1. Если $a \equiv b \ (mod\ m)$ *и* $b \equiv c \ (mod\ m)$, *то* $a \equiv c \ (mod\ m)$

2. Если $a \equiv b \ (mod\ m)$, $c \equiv d \ (mod\ m)$, *то*

1) $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$;
2) $a \cdot c \equiv b \cdot d \ (mod\ m)$.

3. Если $a \equiv b \ (mod\ m)$, *то* $a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$.

<u>*Замечание*</u>. *Сравнения по одному и тому же модулю можно складывать, вычитать и умножать. Но сравнения нельзя делить!*

Пример: $10 \equiv 2 \ (mod\ 8)$, $2 \equiv 2 \ (mod\ 8)$, *но* $5 \not\equiv 1 \ (mod\ 8)$

<u>*Идея №1*</u>: *записывать условия (или различные случаи) в виде сравнений и производить с ними арифметические действия.*

<u>*Идея №2*</u>: *использовать цикличность остатков при возведении в степень*

<u>*Идея №3*</u>: *в сравнениях переходить к отрицательному основанию степени, меньшему по модулю.*

<u>*Идея №4*</u>: *использовать свойства степеней.*

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1. Докажите, что $a^2 + 2$ не делится на 5 ни при каком целом a.
2. Докажите, что число вида $9^n + 1$, где $n \in N$, не может оканчиваться более чем одним нулём.
3. Имеет ли уравнение $3x^2 - 4y^2 = 13$ целочисленные решения?
4. Докажите, что число $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.
5. Какой цифрой оканчивается число $33^{77} + 77^{33}$?
6. Найдите последнюю цифру числа 2007^{2007}.
7. Докажите, что $(a^{2n} - b^{2n}) ⋮ (a+b)$ при любом $n \in N$.