5. Сравнения по модулю Свойства сравнений

Пусть $m \in N$.

<u>Определение 1</u>. Два целых числа ***a*** *и* ***b*** *называются* ***сравнимыми по модулю m****, если* ***a*** *и* ***b*** *дают одинаковые остатки при делении на* ***m****. Запись:* $a \equiv b \pmod m$

<u>Определение 2</u>. Два целых числа ***a*** *и* ***b*** *называются* ***сравнимыми по модулю m****, если* $(a-b) \vdots m$.

1. Если $a \equiv b \pmod m$ *и* $b \equiv c \pmod m$*, то* $a \equiv c \pmod m$

2. Если $a \equiv b \pmod m$*,* $c \equiv d \pmod m$*, то*

1) $a + c \equiv b + d \pmod m$*;*

2) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$*.*

3. Если $a \equiv b \pmod m$*, то* $a^n \equiv b^n \pmod m$*.*

<u>Замечание</u>. Сравнения по одному и тому же модулю можно складывать, вычитать и умножать. Но сравнения нельзя делить!

Пример: $10 \equiv 2 \pmod 8$*,* $2 \equiv 2 \pmod 8$*, но* $5 \not\equiv 1 \pmod 8$

<u>Задачи для обсуждения</u>

1. Какие остатки может давать квадрат целого числа при делении на 3?

2. Какие остатки дает 2^n при делении на 5?

3. Найдите остаток от деления числа 222^{2020} на 7.

4. Найдите остаток от деления числа 2^{2020} на 3.

5. Докажите, что $\left(12^{2n+1} + 11^{n+2}\right) \vdots 133$ при любом $n \in N$.

6. Докажите, что $\left(2^{5n-2} + 5^{n-1} \cdot 3^{n+1}\right) \vdots 17$ при любом $n \in N$.

7. Докажите, что $(a^n - b^n) \vdots (a-b)$ при любых $n \in N, a, b \in Z, a \neq b$.

<u>Идея №1</u>: записывать условия (или различные случаи) в виде сравнений и производить с ними арифметические действия

<u>Идея №2</u>: использовать цикличность остатков при возведении в степень

<u>Идея №3</u>: в сравнениях переходить к отрицательному основанию степени, меньшему по модулю.

<u>Идея №4</u>: использовать свойства степеней.