

Прямой угол в окружности

Конструкция. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Доказать, что $O_1O_2 \perp AB$. *Указание:* использовать ГМТ – серединный перпендикуляр.

Лемма. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

Задача 1. На сторонах AB и AC треугольника ABC как на диаметрах построены окружности. Их центры – точки M и N . Эти окружности пересекаются в точках A и H . Докажите, что 1) $H \in BC$; 2) $MN \parallel BC$.

Задача 2. В треугольнике ABC провели высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . 1) Найдите четыре точки, которые лежат на одной окружности. 2) Сколько таких окружностей? 3) Укажите их центры.

Задача 3. В треугольнике ABC провели высоты BL и CK . Доказать, что серединный перпендикуляр к KL проходит через середину стороны BC .

Задача 4. Высоты AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки X и Y – середины отрезков AB и CH соответственно. Доказать, что прямые XY и $A'B'$ перпендикулярны. (ММО, 2005, 8.3. А.А.Заславский)

Задача 5. Из точки P опущены перпендикуляры PA_1 , PB_1 , PC_1 на стороны треугольника ABC . Прямая l_a соединяет середины отрезков PA и B_1C_1 . Аналогично определяются прямые l_b и l_c . Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Задача 6. Даны точки A и B . Найти ГМТ M таких, что угол AMB – а) тупой; б) острый.

Следствие: медиана тупоугольного треугольника меньше стороны, к которой она проведена.

Задача 7. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены окружности. Доказать, что они покрывают весь четырехугольник.

Задача 8. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке S . Касательные к окружности ω в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что точки A , S и P лежат на одной прямой.