

Подготовительные задачи

1. Докажите, что $(a^2 - a):2$ при любом целом a .
2. Докажите, что $(a^3 - a):3$ при любом целом a .
3. Докажите, что $(a^5 - a):5$ при любом целом a .

Задачи для обсуждения

1. Сколькими способами можно раскрасить a разными красками круг, разбитый на p одинаковых секторов, где p – простое число? (Каждый сектор окрашивается одной краской; не обязательно использовать все краски; две раскраски, совпадающие при повороте круга, считаются одинаковыми.)
2. Верно ли, что $(a^4 - a):4$, $(a^6 - a):6$, $(a^9 - a):9$ при любом натуральном a ?
3. Пусть n – натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^8 - 1$ делится на 17.
4. Пусть p – простое число ($p \neq 2, p \neq 5$). Докажите, что существует число $111\dots 11$, кратное p .
5. Найдите остаток от деления 2^{100} на 101.
6. Найдите остаток от деления 3^{102} на 101.
7. Докажите, что $(a^{73} - a)$ делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$ при любом целом a .
8. Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?
9. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.
10. Докажите, что $30^{239} + 239^{30}$ – составное.

