Делимость. Основные свойства

Определение. Пусть ***a*** и ***b*** – целые числа, $b \neq 0$. Говорят, что число ***a делится*** на число ***b***, если существует такое целое число ***q***, что $a = b \cdot q$.

Делимость суммы и разности

Свойство 1. Рассмотрим три числа, связанных соотношением $a + b = c$ (*).
Для них будут выполнены свойства:
1) Если два из трёх чисел делятся на **n**, *то и третье число тоже будет делиться на* **n**.
2) Если одно из этих чисел делится на **n**, *то два других либо одновременно делятся на* **n**, *либо одновременно не делятся на* **n**.

Свойство 2. Рассмотрим произвольное количество чисел, связанных соотношением $a + b + \ldots + c = z$ (**).
Для них будут выполнены свойства:
1) Если известно, что все числа, кроме одного, делятся на **n**, *то и оставшееся число тоже будет делиться на* **n**.
2) Если известно, что все числа, кроме двух, делятся на **n**, *то два оставшихся либо одновременно делятся на* **n**, *либо одновременно не делятся на* **n**.
Замечание. В равенстве (**) любые «+» можно заменить на «–».Указанные свойства при этом тоже будут выполняться.

Делимость произведения

Свойство 3. *Если в произведении хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.*

Свойство 4. *Если первое число делится на второе, а второе делится на третье, то и первое число делится на третье.*

Задачи для обсуждения

1. Докажите, что $n^3 - 4n$ делится на 48 при чётном *n*.

2. Известно, что $(ab + cd) \vdots (a - c)$. Докажите, что $(ad + bc) \vdots (a - c)$.

3. Доказать, что если числитель дроби $\dfrac{k^2 - 5k + 8}{k^2 + 6k + 19}$ кратен 11, то дробь сократима.

4. Известно, что $3x + 2y$ делится на 7 при некоторых целых *x* и *y*. Докажите, что $16x + 13y$ делится на 7 при тех же *x* и *y*.

5. Пусть $(ab) \vdots c$ и $(a + b) \vdots c$. Докажите, что $(a^2 + b^2) \vdots c$.
Идея №1: для доказательства делимости разложить число на множители.

Идея №2: для доказательств делимости рассмотреть сумму или разность чисел (складывать и вычитать можно несколько раз).

Идея №3: к выражению можно добавить (или вычесть) число, кратное **n**, *это не изменит делимости на* **n**.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 6 при любом *n*.

2. Докажите, что если $(2a + 3b) \vdots 7$, то и $(a + 5b) \vdots 7$.

3. Пусть $(ab) \vdots c$ и $(a + b) \vdots c$. Докажите, что $(a^4 + b^4) \vdots c$.

4. Доказать, что $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2016}$ не делится на 3.

5. Докажите, что $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121.

Решения

Задачи для обсуждения

1. Докажите, что $n^3 - 4n$ делится на 48 при чётном n.

Решение. I способ. $n^3 - 4n = n(n^2 - 4) = n(n-2)(n+2) = (n-2)n(n+2)$. Получили произведении трех последовательных четных чисел. Среди них хотя бы одно кратно 4 => в разложении есть хотя бы четыре множителя 2.
Кроме этого, обязательно есть число, кратное 3 => в разложении есть хотя бы один множитель 3.
Тогда произведение будет кратно 2·2·2·2·3=48.
II способ. $n = 2k, k \in Z$.
$n^3 - 4n = (2k)^3 - 4\cdot 2k = 8k^3 - 8k = 8\cdot(k-1)k(k+1)$
Среди трех последовательных натуральных чисел есть хотя бы одно четное и ровно одно кратное 3 => произведение будет делиться на 8·2·3=48.

В решении использована <u>Идея №1</u>: для доказательства делимости разложить число на множители.

2. Известно, что $(ab+cd)\vdots(a-c)$. Докажите, что $(ad+bc)\vdots(a-c)$.

Решение. Рассмотрим разность
$(ab+cd)-(ad+bc) = ab+cd-ad-bc = b(a-c)-d(a-c) = (a-c)(b-d)$
Разность и уменьшаемое кратны $(a-c)$ => по свойству 1 вычитаемое кратно $(a-c)$.

В решении использована <u>Идея №2</u>: для доказательств делимости рассмотреть сумму или разность чисел.

3. Доказать, что если числитель дроби $\dfrac{k^2-5k+8}{k^2+6k+19}$ кратен 11, то дробь сократима.

Решение. Как связаны между собой числитель и знаменатель?
$(k^2-5k+8)+(11k+11) = k^2+6k+19$. Оба слагаемых кратны 11 => по свойству 1 сумма кратна 11 => дробь можно сократить на 11.

В решении использована <u>Идея №3</u>: к выражению можно добавить (или вычесть) число, кратное n, это не изменит делимости на n.

4. Известно, что $3x+2y$ делится на 7 при некоторых целых x и y. Докажите, что $16x+13y$ делится на 7 при тех же x и y.

Решение. Используя выражения из текста задачи нужно, подобрав некоторые числовые коэффициенты, составить некоторое выражение, которое будет гарантированно делиться на 7. Подбор коэффициентов по x: 16·3-3·2=42. Таким образом:
$3(16x+13y)-2(3x+2y) = 48x-6x+39y-4y = 42x+35y = 7(6x+5y)\vdots 7$
Т.к. по условию $(3x+2y)\vdots 7$ => $2(3x+2y)$ => (по св.1) $3(16x+13y)\vdots 7$ =>
(т.к. 3 и 7 – взаимно простые) $(16x+13y)\vdots 7$.

В решении использована <u>Идея №2</u>: для доказательств делимости рассмотреть сумму или разность чисел (но при этом сложение и вычитание пришлось выполнять несколько раз).

5. Пусть $(ab)\vdots c$ и $(a+b)\vdots c$. Докажите, что $(a^2+b^2)\vdots c$.

Решение. $(a+b)\vdots c$ => $(a+b)^2\vdots c$. $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$. $(2ab)\vdots c$. Уменьшаемое и вычитаемое кратно c, следовательно, разность кратна c.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 6 при любом *n*.

Решение. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$. Получили произведении трех последовательных целых чисел. Среди них хотя бы одно кратно 2 => в разложении есть хотя бы один множитель 2. Кроме этого, обязательно есть число, кратное 3 => в разложении есть хотя бы один множитель 3. Тогда произведение будет кратно 2·3=6.

2. Докажите, что если $(2a+3b)\vdots 7$, то и $(a+5b)\vdots 7$.

Решение. Рассмотрим выражение $3(2a+3b)+(a+5b)=7a+14b$. Т.к. сумма и одно из слагаемых кратно 7, то второе слагаемое будет кратно 7 .

3. Пусть $(ab)\vdots c$ и $(a+b)\vdots c$. Докажите, что $(a^4+b^4)\vdots c$.

Решение. Из условия следует, что $(a^2+b^2)\vdots c$ (см. задачу №5 для обсуждения).
$(a^2+b^2)^2 = a^4+b^4+2a^2b^2 = (a^4+b^4)+2\cdot(ab)^2$.
Т.к. сумма и одно из двух слагаемых кратно *c*,
то второе слагаемое также кратно *c* => $(a^4+b^4)\vdots c$.

4. Доказать, что $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2016}$ не делится на 3.

Решение. Разобьем слагаемые на пары и в каждой паре вынесем общий множитель.
$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{2016} = (1+2)+2^2(1+2)+2^4(1+2)+\ldots+2^{2014}(1+2)+2^{2016}$ Все слагаемые, кроме последнего, кратны 3, а последнее (2^{2016}) не кратно 3. Следовательно, сумма не делится на 3.

5. Докажите, что n^2+3n+5 не делится на 121.

Решение. $n^2+3n+5=(n-7)(n+4)+33$
Пусть $(n^2+3n+5)\vdots 121$. Тогда $(n^2+3n+5)\vdots 11$ => Произведение $(n-7)(n+4)\vdots 11$ => (т.к. 11 – простое) хотя бы один из множителей $(n-7)$ или $(n+4)$ кратен 11. Но эти выражения отличаются на 11 => если одно из них кратно 11, то и другое кратно 11, т.е. оба должны быть кратны 11. Тогда их произведение кратно 121 => $33\vdots 121$. Противоречие.